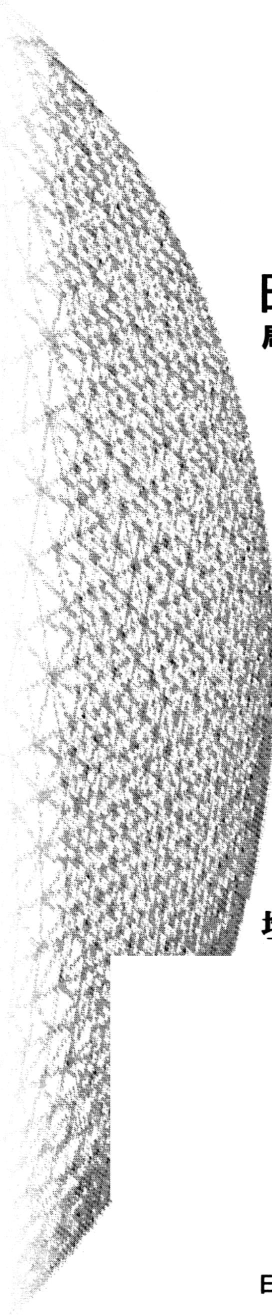


曲面の微分幾何学

局所理論から大域理論へ

塩濱勝博・成 慶明 共著

日本評論社

はじめに

本書は理 (工) 学部 3–4 年生レベルの講義 1 年間で学ぶ内容 (第 1 章–第 6 章) および 4 年生のセミナーでのトピックス (第 7 章–第 14 章) を通じて学生諸君に微分幾何学の局所理論を理解し，更に大域的考察に親しんでもらうことを意図して著したものである．

前半の講義部分では素朴な疑問にできるだけ答えるように努めた．これは当然のことをていねいに説明することを意味する．たとえば，定曲率空間曲線が常螺旋であることを定係数常微分方程式系を実際に解いて示した．n 次元キューブの体積は平行四辺形の面積や平行 6 面体の体積を求める原理『底辺 (底面積)× 高さ』を一般次元に適用して求められることを示した．曲面の主曲率，平均曲率，Gauss 曲率などの曲率は曲面の正則表示には無関係な，曲面固有の量であることなどである．当然のことながら，線形代数と微分積分の復習 (線形微分方程式系の解法も含めて) にも重点をおいた．たとえば，曲面に都合のよい局所座標系を導入するさい，逆関数定理を使うので，陰関数定理とともに述べた．臍点(せいてん)でない点の近傍で曲率線や漸近線をパラメータ曲線とする正則表示の存在を示した．素朴な疑問の一例として『曲線が長さを持つためにはいかなる条件が必要か？』を考える．Appendix I で，有界変動関数を用いてこの問題に対する解答を用意した．

大域的微分幾何学の基本的な考え方の 1 つは『曲面の各点における種々の曲率に関する情報を曲面全体に集約して，曲面の全体像 (すなわち，曲面の大域的性質) をいかにして把握するか？』である．Gauss-Bonnet の定理 (第 6 章) はその好例の 1 つであって，微分幾何学と位相数学を結びつける極めて重要な結果である．第 6 章では，微分形式を用いて Gauss-Bonnet の定理を証明する．

向き付け可能でない曲面に対する Gauss-Bonnet の定理も証明する．

後半ではこの考え方にしたがいセミナーの話題を取り上げた．すなわち，第 10 章以降では『いかにして曲面全体像をさまざまな曲率などの条件下で決定するか？』を主要なテーマとする．大域的考察を進めるに先立ち，第 7 章では位相空間論の基礎を，第 8 章ではさまざまな位相空間の例を示してホモトピー，基本群などを準備した．このように多様体の導入に必要な知識を準備した上で，n 次元多様体と Riemann 幾何学の基礎知識をまとめて第 9 章で解説した．一般次元の議論は第 9 章と Appendix のみである．$\mathbf{R}^3$ 内の Gauss 曲率が一定の完備曲面の全体像がどのような条件下で決定できるかを第 10 章で議論し，コンパクトで Gauss 曲率一定の曲面に関する Liebmann の定理と完備平坦曲面が柱面であるという W.S.Massey の定理を証明する．平坦曲面の平面への展開を解説し，展開を用いて被覆空間や基本群の直観的解説を試みた．さらに第 11 章で完備非コンパクト 2 次元 Riemann 多様体上の曲率積分に関する Cohn-Vossen や Huber の定理を解説する．Huber の定理の証明には Morse exhaustion 関数の存在を用いて，Cohn-Vossen の定理の応用として証明を試みた．Appendix II で解説した Whitney のはめ込み定理を応用して Morse exhaustion 関数の構成を試みた．$\mathbf{R}^3$ 内の完備極小曲面は全曲率が有界ならば有限連結であるという事実は Huber の定理の対偶で，極小曲面の議論でよく利用される．

曲面の形を決める立場にたてば，Gauss 曲率一定な $\mathbf{R}^3$ 内の曲面の次の目標と考えられる曲面はおそらく極小曲面であろう．第 12 章では $\mathbf{R}^3$ 内の完備極小曲面の形を決定するための種々の条件を等温座標系を用いて議論する．面積に関する第 2 変分公式を求め，平面上のグラフ極小曲面に関する Bernstein の定理，極小曲面の不安定性に関する判定条件を与えた Pogorelov の定理，安定な単連結極小曲面は平面であるという定理などを解説する．第 13 章では平均曲率が一定で球面と同相な曲面は標準的球面であるという H.Hopf の定理，有界領域の境界となっている曲面の平均曲率が一定ならば標準的球面であるという A.D.Alexandrov の定理や Minkowski の積分公式および Gauss 曲率が符号を変えない平均曲率一定の完備曲面の分類に関する Klotz-Osserman の定理などを解説する．第 14 章では 2 つの主曲率のうちの 1 つが一定の完備曲面の形を決定する．特に，Willmore の予想がコンパクトな管曲面族に対して肯定的に解決される．第 12, 13 章の議論では複素関数論や偏微分方程式の基礎知識が必要とな

るが，これらを一部認めた上で標準的球面の特徴づけが得られる．Liebmann の定理などの証明には曲率線を座標曲線とする局所座標系を用いるが，Massey の定理では局所座標系と微分形式を用いる証明がある．主曲率の 1 つが一定な曲面に関しては微分形式を用いる方法で証明する．目的に応じた証明方法を工夫する必要がある．これが部分多様体の幾何を展開するさいの煩わしさであろう．

Appendix II では H.Whitney のはめ込み定理を解説した．抽象的でイメージが捉えにくい多様体が Euclid 空間内の n 次元曲面として実現されることは極めて重要である．Appendix III では曲面の形を決めることにこだわった最後の話題として，$\mathbf{R}^N$ 内の n 次元コンパクト部分多様体 M の全絶対曲率が全てのはめ込みにわたる下限を実現すれば，M は $\mathbf{R}^{n+1}$ 内の凸体の境界で，特に標準的球面と微分同相であるという Chern-Lashof の定理を解説した．図形としての形が決まらなくても，位相の形が決まることを強調したい．関連する結果として $\mathbf{R}^{2n+1}$ 内のコンパクト偶数次元超曲面に関する Gauss-Bonnet の定理も解説した．

Appendix II, III で示したように，多様体を調べることは完備 Riemann 多様体を調べることと同値で，さらにこれは Euclid 空間内の部分多様体を調べることと同値である．Riemann 多様体や部分多様体にどんな条件を設定したら多様体の位相 (あるいは微分構造) を決定出来るか？　という問題は今後も尽きることなくさまざまな状況で研究されていくだろう．いろいろと調べてみると図形としての形が決まらなくても，位相の形が決まることがよくある．未解決の問題は多数残されていることを強調しておきたい．

本書で証明を割愛した幾つかの結果を記し，自習で補ってもらうことを期待したい．

(i)　Dirichlet 問題の解の存在 (13 章).

(ii)　単調関数はほとんど至るところで微分可能である (Appendix I).

(iii)　コンパクト多様体上の Morse 関数の臨界点の指数とベッチ数に関する Morse の不等式 (Appendix III).

(iv)　Sard の定理 (Appendix II).

本書の前半の部分は熊本大学，福岡大学，九州大学，佐賀大学での講義録をもとにして書いた．特に位相空間の部分は九州大学での講議・演習のさいに塩

濱が作成したノートを加藤文元氏が加筆訂正されたものをもとにした．石川晋氏，関沢正躬氏は初期のノートを読んでくださった．ここに3氏に謝意を表したい．

2005年12月

塩濱勝博
成　慶明

目　次

第1章　序論

すでに学んだ線形代数と微分積分の知識を図形の上で融合させることによって曲線や曲面を詳しく調べることができる．曲線や曲面を通じて線形代数や微分積分の理解が更に深まるだろう．曲線論の基本は1変数のベクトル値関数だから，これから始める．2変数のベクトル値関数として曲面をとらえるからこれらの基礎を解説する．当然のことであるが，線形代数および微分積分の復習を積極的に取り入れる．Euclid 空間の位相も大切な概念であるが，これはあとで位相空間の一般論の中で述べる．

1.1　Euclid 空間

n 次元実数空間 $\mathbf{R}^n$ は実数上のベクトル空間で，自然な基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ は

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

で与えられる．内積は通常のドット積を用いる．$\langle , \rangle$ も用いる．$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ を

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} u^i \mathbf{e}_i, \qquad \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} v^i \mathbf{e}_i$$

と表したとき，これらの内積は

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u^i v^i$$

で，これからベクトルの長さ (ノルム) が

$$\|\mathbf{u}\| := \langle \mathbf{u},\, \mathbf{u} \rangle^{\frac{1}{2}}$$

で定義される．従って，2 点 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ の距離 d を

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle^{\frac{1}{2}} = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

によって導入すると，$\mathbf{R}^n$ は距離空間となる．これを **Euclid 空間**という．

1.2　ベクトル値関数

1.2.1　1 変数ベクトル値関数

n 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ に値をとる区間 $\mathbf{I}$ 上の関数 $\mathbf{f} : \mathbf{I} \to \mathbf{R}^n$ は $\mathbf{R}^n$ の自然な基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ に関して n 個の関数の組を用いて

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{i=1}^{n} f^i(t)\mathbf{e}_i$$

と表せる．ここに，$f^i : \mathbf{I} \to \mathbf{R}\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ である．

定義 1.1　区間 $\mathbf{I}$ 上のベクトル値関数

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{i=1}^{n} f^i(t)\mathbf{e}_i$$

は各成分 f^i が連続のときに**連続**であるという．全ての $i = 1, 2, \cdots, n$ に対して f^i が $\mathbf{I}$ を含む開区間上に拡張され，そこで C^r-級のとき，$\mathbf{f}$ は **C^r-級**という．このとき $\mathbf{f}$ の微分は以下で与えられる：

$$\frac{d\mathbf{f}(t)}{dt} := \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{f}(t+h) - \mathbf{f}(t)}{h} = \sum_i \frac{df^i(t)}{dt}\,\mathbf{e}_i.$$

以下の命題は明らかだろう．

命題 1.2　(i)　ベクトル値関数 $\mathbf{f}$ が連続であるならばそのノルム $\|\mathbf{f}\| : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ も連続である．

(ii)　2 つのベクトル値関数 $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ が C^r-級微分可能ならば，それらの和，差，内積 $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle$ は C^r-級微分可能である．

(iii)　2 つのベクトル値関数 $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ に対して以下の Schwarz の不等式が成り立つ：

$$|\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle| \leq \|\mathbf{f}\| \cdot \|\mathbf{g}\|.$$

(iv)　n 個の C^1-級ベクトル値関数 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \cdots, \mathbf{X}_n : \mathbf{I} \to \mathbf{R}^n$ が定める行列式 $f(t) := |\mathbf{X}_1(t)\ \mathbf{X}_2(t)\ \cdots\ \mathbf{X}_n(t)|$ の微分は以下で与えられる：

$$f'(t) = |\mathbf{X}_1'\ \mathbf{X}_2\ \cdots\ \mathbf{X}_n| + |\mathbf{X}_1\ \mathbf{X}_2'\ \mathbf{X}_3\ \cdots\ \mathbf{X}_n| + \cdots + |\mathbf{X}_1\ \mathbf{X}_2\ \cdots\ \mathbf{X}_n'|.$$

問 1.3　$\mathbf{R}^n$ 内の距離を d とする．2 直線 $\ell_1(t), \ell_2(t)\ (t \in \mathbf{R})$ は $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i\ (i = 1, 2)$ を 0 でないベクトルとして

$$\ell_i(t) = \mathbf{a}_i + t\mathbf{b}_i \qquad (t \in \mathbf{R}, \quad i = 1, 2)$$

で与えたとき，

$$d(t) := d(\ell_1(t), \ell_2(t)), \qquad h(t) := d(\ell_1(t), \ell_2(\mathbf{R}))$$

はともに凸関数であることを証明せよ．ここに，

$$d(\ell_1(t), \ell_2(\mathbf{R})) = \inf_{s \in \mathbf{R}} d(\ell_1(t), \ell_2(s))$$

とおいた．

1.2.2　n 変数ベクトル値関数

連結な開集合を領域という．連結性については第 8 章で詳しく述べる．$\mathbf{R}^k$ 内の領域 $\Omega \subset \mathbf{R}^k$ で定義された C^∞-級ベクトル値関数

$$\mathbf{f} : \Omega \to \mathbf{R}^n,$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(x^1, x^2, \cdots, x^k) = \sum_{j=1}^{n} f^j(x^1, x^2, \cdots, x^k)\,\mathbf{e}_j$$

を考える．ここで，各 $f^j(x^1, x^2, \cdots, x^k)$ は C^∞-級で，偏微分については

$$f_a^j := \frac{\partial f^j}{\partial x^a} \qquad (a = 1, \cdots, k,\ j = 1, \cdots, n)$$

とおく．偏微分を数回行うさい，記法によって微分するパラメータの順序が逆転することに注意する．たとえば：

$$f_{ba}^j := \frac{\partial^2 f^j}{\partial x^a \partial x^b} = \frac{\partial}{\partial x^a}\Big(\frac{\partial f^j}{\partial x^b}\Big),$$
$$f_{cba}^j := \frac{\partial^3 f^j}{\partial x^a \partial x^b \partial x^c} = \frac{\partial}{\partial x^a}\Big(\frac{\partial^2 f^j}{\partial x^b \partial x^c}\Big)$$

である．更に

$$\mathbf{f}_{ab} = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x^b \partial x^a} = \sum_{j=1}^{n} f_{ab}^j \mathbf{e}_j$$

と記す．以下の命題は曲面の積分可能条件や測地線の変分の計算のさいにしばしば用いられる．

命題 1.4 $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbf{R}^n$ が C^2-級微分可能ならば

$$\mathbf{f}_{ab} = \mathbf{f}_{ba},$$

つまり，

$$\frac{\partial^2 f^j}{\partial x^a \partial x^b} = \frac{\partial^2 f^j}{\partial x^b \partial x^a} \qquad (a,\, b = 1,\, 2, \cdots,\, k,\ j = 1,\, 2,\, \cdots,\, n)$$

である．

滑らかなベクトル値関数を扱うときは偏微分の順序については注意する必要はない．

$\{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_k\}$ を $\mathbf{R}^k$ の自然な基底として，ベクトル値関数 $\mathbf{y} = \mathbf{f} : \Omega \to \mathbf{R}^n$ の点 $\mathbf{x} = \sum_{a=1}^{k} x^a \mathbf{e}_a \in \Omega$ における $\mathbf{e}_a$ 方向の方向微分 $d\,\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{e}_a)$ は

$$d\,\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{e}_a) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{e}_a) - \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\varepsilon} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^j}{\partial x^a} \mathbf{e}_j$$

と表せる．従って $\mathbf{x}$ における $\mathbf{h}$ 方向への $\mathbf{f}$ の方向微分 $d\,\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{h})$ は

$$d\,\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{h}) = \sum_{a=1}^{k} h^a \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^j}{\partial x^a} \mathbf{e}_j \tag{1.2.1}$$

となる．

定義 1.5 $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ において，線形写像 $\mathbf{L}_{\mathbf{x}_0} : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ と $\mathbf{x}_0$ の近傍で定義された連続なベクトル値関数 $\mathbf{R}(\mathbf{x}_0, *) : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ が存在して，

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{L}_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{h}) + \mathbf{R}(\mathbf{x}_0,\, \mathbf{h}),$$
$$\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{\mathbf{R}(\mathbf{x}_0,\, \mathbf{h})}{|\mathbf{h}|} = \mathbf{0}$$

が成り立つとき，$\mathbf{f}$ は $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ で (全) 微分可能であるという．

$\mathbf{f}$ が $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ で微分可能のとき，$\mathbf{L}_{\mathbf{x}_0}$ の線形性から $\mathbf{L}_{\mathbf{x}_0}(\alpha \mathbf{h}) = \alpha \mathbf{L}_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{h})$ とな

るから

$$d\mathbf{f}_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{h}) = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0+\alpha\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{\alpha}$$
$$= \mathbf{L}_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{h}) + \lim_{\alpha\to 0}\frac{\mathbf{R}(\mathbf{x}_0,\,\alpha\mathbf{h})}{\alpha} = \mathbf{L}_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{h})$$

を満たす．このとき (1.2.1) より $\mathbf{L}_{\mathbf{x}_0}$ の行列表示は

$$\mathbf{L}_{\mathbf{x}_0} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^2} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^k} \\ \dfrac{\partial f^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial f^2}{\partial x^2} & \cdots & \dfrac{\partial f^2}{\partial x^k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f^n}{\partial x^1} & \dfrac{\partial f^n}{\partial x^2} & \cdots & \dfrac{\partial f^n}{\partial x^k} \end{pmatrix}$$

となる．

定義 1.6　ベクトル値関数 $\mathbf{x} : A \to \mathbf{R}^n$ の定義域 $A \subset \mathbf{R}^k$ がコンパクトの場合，A を含む開集合 $U \subset \mathbf{R}^k$ とその上で定義された C^∞- 級ベクトル値関数 $\widetilde{\mathbf{x}} : U \to \mathbf{R}^n$ が存在して

$$\widetilde{\mathbf{x}}|_A = \mathbf{x}$$

を満たすとき，$\mathbf{x} : A \to \mathbf{R}^n$ を C^∞**-級ベクトル値関数**という．

微分積分学で学んだ定理で，特に重要なものは逆関数定理と陰関数定理である．

定理 1.7 (逆関数定理)　$U, V \subset \mathbf{R}^n$ は開集合，$\mathbf{f} : U \to V$ は C^∞-級写像とする．もしも

$$\operatorname{rank} d\mathbf{f}(\mathbf{u}_0) = n$$

が $\mathbf{u}_0 \in U$ で成立すれば，$\mathbf{u}_0$ の近傍 $U_0 \subset U$ が存在して以下が成り立つ：

(i)　$\mathbf{f}|_{U_0}$ は単射である．

(ii)　$\mathbf{f}(U_0)$ は開集合．

(iii)　$(\mathbf{f}|_{U_0})^{-1} : \mathbf{f}(U_0) \to U_0$ は C^∞-級写像である．

定理 1.8 (陰関数定理)　$\Omega \subset \mathbf{R}^n$ を領域とする．$f : \Omega \to \mathbf{R}$ は C^∞-級関数で点 $(u_0^1, \cdots, u_0^n) \in \Omega$ において

$$f(u_0^1, \cdots, u_0^n) = 0, \qquad f_n(u_0^1, \cdots, u_0^n) \neq 0$$

を満たすとき，点 $(u_0^1, \cdots, u_0^{n-1})$ の近傍 $U \subset \mathbf{R}^{n-1}$ と C^∞-級関数 $\varphi : U \to \mathbf{R}$ が一意的に存在して以下が成り立つ：

(i) $f(u^1, \cdots, u^{n-1}, \varphi(u^1, \cdots, u^{n-1})) = 0 \qquad ((u^1, \cdots, u^{n-1}) \in U)$.

(ii) $\varphi(u_0^1, \cdots, u_0^{n-1}) = u_0^n$.

(iii) $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u^i} = -\dfrac{f_i}{f_n} \qquad (i = 1, \cdots, n-1)$.

1.2.3 関数の勾配ベクトル

$\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 上で定義された C^∞-級関数 $f : \Omega \to \mathbf{R}$ に対して勾配ベクトル場 ∇f を

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} f_i \mathbf{e}_i$$

によって定義する．

命題 1.9 $\mathbf{P} \in \Omega$ において C^∞-級関数 $f : \Omega \to \mathbf{R}$ が $\nabla f(\mathbf{P}) \neq \mathbf{0}$ を満たすとき，勾配ベクトル $\nabla f(\mathbf{P})$ は $\mathbf{P}$ において f が最大に増加する方向と一致する．

証明 $\mathbf{u} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u^i \mathbf{e}_i$ を単位ベクトルとして，$\mathbf{u}$ に関する f の方向微分を求める．

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(f(\mathbf{P} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{P})\Big) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Bigg[\Bigg\{f\Bigg(\mathbf{P} + h\sum_{i=1}^{n} u^i \mathbf{e}_i\Bigg) - f\Bigg(\mathbf{P} + h\sum_{i=1}^{n-1} u^i \mathbf{e}_i\Bigg)\Bigg\} \\
&\qquad + \Bigg\{f\Bigg(\mathbf{P} + h\sum_{i=1}^{n-1} u^i \mathbf{e}_i\Bigg) - f\Bigg(\mathbf{P} + h\sum_{i=1}^{n-2} u^i \mathbf{e}_i\Bigg)\Bigg\} \\
&\qquad + \cdots + \Big\{f\left(\mathbf{P} + hu^1\mathbf{e}_1\right) - f\left(\mathbf{P}\right)\Big\}\Bigg] \\
&= \langle \mathbf{u}, \nabla f(\mathbf{P})\rangle \leq \|\nabla f(\mathbf{P})\|.
\end{aligned}$$

最後の不等式は Schwarz の不等式である．等号は $\mathbf{u} = \dfrac{\nabla f(\mathbf{P})}{\|\nabla f(\mathbf{P})\|}$ のときに限る． ∎

1.3 空間の向き

平面に向きがついていることは通常の定積分によっても解るだろう．たとえば直線に向きがあることは

$$\int_0^1 dx = 1, \qquad \int_1^0 dx = -1$$

から解る．この事柄をベクトル空間としてとらえるとすれば行列式を思い浮かべるだろう．すなわち，

$$|\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2| = 1, \qquad |-\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2| = -1.$$

積分の上端と下端はベクトルの頭と尻尾と考え，被積分関数 1 は xy-平面の y 軸の正方向 (すなわち $\mathbf{e}_2$ 方向) と考えると，これらの正方形の面積は異なる．ここに登場した 2 つの直交基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ と $\{-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ は平面内の回転によって重ね合わすことができない！　これらの直交基底によって定められた平面の向きが異なると理解されるだろう．

1.3.1 平行 $2n$ 面体の体積

$\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n \in \mathbf{R}^n$ を 1 次独立なベクトルとし，$\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k$ が張る平行 $2k$ 面体 $C(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k)$ $(2 \leq k \leq n)$ を以下で定義する：

$$C(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k) = \left\{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n \,\middle|\, \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{u}_i,\ 0 \leq \lambda_i \leq 1\right\}.$$

$\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_i$ が張る部分空間を $\mathbf{L}_i$ とする．各 $i = 2, \cdots, n$ に対してベクトル $\mathbf{u}_i$ を $\mathbf{L}_{i-1}$ に関して以下のように直交分解する：

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i^{\perp} + \mathbf{u}_i^{\top}, \qquad \mathbf{u}_i^{\top} \in \mathbf{L}_{i-1}, \qquad \mathbf{u}_i^{\perp} \perp \mathbf{L}_{i-1}.$$

$C(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k)$ の体積を $\mathrm{Vol}(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k)$ と表す．すでに学んだように，平行四辺形 $C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ の面積は底辺の長さと高さの積 $(= \|\mathbf{u}_1\| \cdot \|\mathbf{u}_2^{\perp}\|)$ である．平行 6 面体 $C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ の体積は底面積と高さの積 $(= (\|\mathbf{u}_1\| \cdot \|\mathbf{u}_2^{\perp}\|) \cdot \|\mathbf{u}_3^{\perp}\|)$ である．このアイデアで平行 $2n$ 面体の体積が計算できる．

$$\mathrm{Vol}(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n) := \mathrm{Vol}(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_{n-1}) \cdot \|\mathbf{u}_n^{\perp}\|$$

で $C(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n)$ の体積を定義する．実際に $C(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n)$ の体積 (向きを考慮した) がこの行列式 $|\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n|$ で与えられることを以下に示す．n 次正方

行列を $U = (\mathbf{u}_1 \ \cdots \ \mathbf{u}_n)$ とすると

$$(\det U)^2 = |U^t U| = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_n \\ \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_n \end{vmatrix}.$$

補題 1.10 平行 $2n$ 面体 $C(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n)$ の体積 $\mathrm{Vol}(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n)$ の 2 乗は以下で与えられる：

$$\begin{aligned} &\mathrm{Vol}(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n)^2 \\ &\quad = \mathrm{Vol}(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_{n-1})^2 \|\mathbf{u}_n^\perp\|^2 = \|\mathbf{u}_1\|^2 \cdot \|\mathbf{u}_2^\perp\|^2 \cdots \|\mathbf{u}_{n-1}^\perp\|^2 \cdot \|\mathbf{u}_n^\perp\|^2 \\ &\quad = (\det U)^2. \end{aligned}$$

証明 $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n$ が 1 次独立であるための必要十分な条件は

$$\mathbf{L_1} \subsetneq \mathbf{L_2} \subsetneq \cdots \subsetneq \mathbf{L_n} \tag{1.3.1}$$

である．このとき，以下の関係式を示そう：

$$(\det U)^2 = \mathrm{Vol}(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n)^2 = |\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_{n-1}|^2 \cdot \|\mathbf{u}_n^\perp\|^2.$$

さて，$\mathbf{u}_n^\top \in L_{n-1}$ であり，$\mathbf{u}_n^\perp \cdot \mathbf{u}_i = 0$ が全ての $i = 1, \cdots, n-1$ について成立するから，

$$\mathbf{u}_n^\top = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \mathbf{u}_i \qquad (a_i \in \mathbf{R})$$

と $\mathbf{u}_n^\top$ を表すと，

$$(\det U)^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_n \\ \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{u}_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 & \dots & \sum a_i \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 & \dots & \sum a_i \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum a_i \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_1 & \sum a_i \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_2 & \dots & \sum a_j a_i \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{u}_i + \|\mathbf{u}_n^\perp\|^2 \end{vmatrix}.$$

上式右辺の第 1 列に $(-a_1)$, 第 2 列に $(-a_2)$, 以下第 $(n-1)$ 列に $(-a_{n-1})$ を乗じて順次第 n 列に加えると，上式の第 $n \times n$ 成分は

$$\sum_{ij=1}^{n-1} a_i a_j \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j - \Bigl(\sum_{i=1}^{n-1} a_1 a_i \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^{n-1} a_2 a_i \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_i + \cdots + \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-1} a_i \mathbf{u}_{n-1} \cdot \mathbf{u}_i\Bigr) + \|\mathbf{u}_n{}^\perp\|^2 = \|\mathbf{u}_n^\perp\|^2$$

となって，第 n 列の他の成分は全て 0 となる．従って上式は

$$(\det U)^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 & \cdots & 0 \\ \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum a_i \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_1 & \sum a_i \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_2 & \cdots & \|\mathbf{u}_n^\perp\|^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_{n-1} \\ \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}_{n-1} \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_{n-1} \cdot \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_{n-1} \cdot \mathbf{u}_{n-1} \end{vmatrix} \cdot \|\mathbf{u}_n^\perp\|^2$$

$$= |\mathbf{u}_1 \ \cdots \ \mathbf{u}_{n-1}|^2 \|\mathbf{u}_n^\perp\|^2.$$

これを繰り返して

$$(\det U)^2 = \|\mathbf{u}_1\|^2 \cdot \|\mathbf{u}_2^\perp\|^2 \cdots \|\mathbf{u}_{n-1}^\perp\|^2 \cdot \|\mathbf{u}_n^\perp\|^2$$

となる．この右辺は $\mathrm{Vol}(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n)^2$ に他ならない． ∎

問 1.11　$\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_i$ が張る部分空間を $\mathbf{L_i}$ とおけば，$\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n$ が 1 次独立であるための必要十分な条件は

$$\mathbf{L_1} \subsetneqq \mathbf{L_2} \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathbf{L_n}$$

であることを証明せよ．

1.3.2　有向体積

補題 1.10 で平方根をとると $\mathrm{Vol}(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n) = \pm \det U$．どちらの符号をとるべきかを考える．$\mathbf{R}^n$ の自然な基底を $\{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ とする．このとき自然な基底によって張られる直方体の体積は (微分積分学で学んだように)

$$|\mathbf{e}_1 \ \cdots \ \mathbf{e}_n| = \mathrm{Vol}(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n) = \int \cdots \int_{C(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n)} dx^1\, dx^2 \cdots dx^n = 1$$

であることに疑問はないだろう．さて，

$$\mathbf{u}_i := \sum_{j=1}^{n} u_{ji}\mathbf{e}_j \qquad (u_{ji} \in \mathbf{R})$$

とおけば

$$\begin{aligned}
|\mathbf{u}_1 \ \cdots \ \mathbf{u}_n| &= \left| \sum_{j=1}^{n} u_{j1}\mathbf{e}_j \ \cdots \ \sum_{j=1}^{n} u_{jn}\mathbf{e}_j \right| \\
&= \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \ldots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \ldots & u_{nn} \end{vmatrix} \cdot |\mathbf{e}_1 \ \cdots \ \mathbf{e}_n| \\
&= \det(u_{ij}).
\end{aligned}$$

故に $\mathrm{Vol}(\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n)$ の符号は $n \times n$ 行列 (u_{ik}) の行列式の符号に同調して選ばれる．すなわち，自然な基底 $\{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ を基底 $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n$ に変換する正則写像が定める $n \times n$ 行列の行列式が正 (負) に従ってこの平行 $2n$ 面体の体積の符号が正 (負) となる．

1.4　ベクトル外積

$\mathbf{R}^3$ のベクトル X, Y に対して X, Y のベクトル外積 $X \times Y$ を以下のように定義する．

定義 1.12　ベクトル X, Y の外積 $X \times Y$ は，その長さは X, Y が張る平行四辺形の面積 $|XY|$ に等しく，その向きは $X, Y, X \times Y$ の張る平行 6 面体が正になる方向を持つベクトルである．

ベクトル外積の向きは「右ネジの法則」に従う．すなわち，木ネジをドライバーで回転させて絞めるときに X から Y へ向かってドライバーを回転させるときにネジが進む方向でる．あるいは，鉄棒のまわりに導線を巻いて棒磁石を作るとき電流が流れる向きが X から Y への回転方向と一致するときに磁力線が出る方向が $X \times Y$ である．ベクトル外積は以下の性質を持つ．(2) は Lagrange

恒等式と呼ばれている．

(1)　$X \times Y = -Y \times X$.

(2)　$\langle X \times Y, Z \times W\rangle = \langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle - \langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle$.

(3)　$|XYZ| = \langle X, Y \times Z\rangle = \langle Y, Z \times X\rangle = \langle Z, X \times Y\rangle$.

(4)　$(X \times Y) \times Z = \langle X, Z\rangle Y - \langle Y, Z\rangle X$.

(5)　$(X \times Y) \times (Z \times W) = |XYW|Z - |XYZ|W$.

例 1.13　$X := \sum_{i=1}^{3} x^i \mathbf{e}_i$, $Y := \sum_{i=1}^{3} y^i \mathbf{e}_i$ のときベクトル外積 $X \times Y$ は形式的に

$$X \times Y = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \end{vmatrix}$$

で与えられる．すなわち，

$$X \times Y = (x^2y^3 - x^3y^2)\mathbf{e}_1 - (x^3y^1 - x^1y^3)\mathbf{e}_2 + (x^1y^2 - x^2y^1)\mathbf{e}_3.$$

問 1.14　以下の関係式を証明せよ．

(1)　$\langle X \times Y, Z \times W\rangle = \langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle - \langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle$.

(2)　$|XYZ| = \langle X, Y \times Z\rangle = \langle Y, Z \times X\rangle = \langle Z, X \times Y\rangle$.

(3)　$(X \times Y) \times Z = \langle X, Z\rangle Y - \langle Y, Z\rangle X$.

(4)　$(X \times Y) \times (Z \times W) = |XYW|Z - |XYZ|W$.

問 1.15　$\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} : \mathbf{I} \to \mathbf{R}^3$ を微分可能なベクトル値関数とするとき，以下を示せ：

(5)　$\dfrac{d}{dt}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) = \mathbf{X}' \times \mathbf{Y} + \mathbf{X} \times \mathbf{Y}'$.

(6)　$\dfrac{d}{dt}((\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) \times \mathbf{Z}) = (\mathbf{X}' \times \mathbf{Y}) \times \mathbf{Z} + (\mathbf{X} \times \mathbf{Y}') \times \mathbf{Z} + (\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) \times \mathbf{Z}'$.

第2章　曲線の微分幾何学

区間 $\mathbf{I} = [a,b]$ 上で定義された連続なベクトル値関数 $\mathbf{x} : \mathbf{I} \to \mathbf{R}^n$ の図形的性質を調べることはほとんど不可能だろう．連続なベクトル値関数で，像の長さが無限大となるもの (たとえば Koch 曲線) や平面内の正方形を埋めつくすもの (たとえば Peano 曲線) が存在する．曲線の図形的性質で長さの概念は最も基本的である．滑らかなベクトル値関数 $\mathbf{x} : \mathbf{I} \to \mathbf{R}^n$ の像は滑らかな図形となるだろうか？　速度ベクトルが $\mathbf{0}$ となることを許容すれば，正方形を像として持つ滑らかなベクトル値関数 $\mathbf{x} : \mathbf{I} \to \mathbf{R}^2$ を作ることもできる．ここでは $\mathbf{R}^3$ 内で $\mathbf{x} : \mathbf{I} \to \mathbf{R}^3$ が長さや空間図形としての形が決まるための条件を考える．

2.1　曲線の概念

微分幾何学で扱う曲線は通常速度ベクトルが消えないベクトル値関数 $\mathbf{x} : \mathbf{I} \to \mathbf{R}^n$ である．閉区間 $\mathbf{I}$ 上で定義された C^r-級ベクトル値関数は

$$\dot{\mathbf{x}}(t) := \frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) \neq \mathbf{0} \qquad (\forall t \in \mathbf{I})$$

を満たすとき，**曲線**という．$\dot{\mathbf{x}}(t)$ を**速度ベクトル**という．像集合 $\mathcal{C} := \mathbf{x}(\mathbf{I})$ を曲線と呼ぶこともある．曲線 $\mathcal{C} := \mathbf{x}(\mathbf{I})$ の長さ $L(\mathcal{C})$ を以下のように定義する：

$\mathbf{I}$ の分割 Δ を

$$\Delta\colon a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b, \qquad |\Delta| := \sup_{1 \leq i \leq N} |t_i - t_{i-1}|$$

とせよ．分点 $\mathbf{x}(t_i)$ を次々に線分で結んでできた折れ線を Γ_Δ と書く．この折れ線の長さ $L(\Gamma_\Delta)$ は以下の式で与えられる：

$$L(\Gamma_\Delta) = \sum_{i=1}^{N} \|\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}(t_{i-1})\|.$$

ここでもしも，$|\Delta| \to 0$ としたとき，$L(\Gamma_\Delta)$ の極限が存在すれば，その極限をもって $\mathcal{C}$ の長さと定義する．

ここでは C^1-級曲線 $\mathbf{x} : \mathbf{I} \to \mathbf{R}^n$ の長さは以下の Riemann 積分で与えられることを示そう．

定理 2.1　$\mathbf{x} : \mathbf{I} \to \mathbf{R}^n$ が C^1-級曲線のとき，$\mathcal{C} := \mathbf{x}(\mathbf{I})$ の長さ $L(\mathcal{C})$ は

$$L(\mathcal{C}) = \int_{\mathbf{I}} \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| dt$$

で与えられる．

証明　$\mathbf{x}$ を

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

と表せば，上で述べた $\mathbf{I}$ の分割 Δ に対して

$$L(\Gamma_\Delta) = \sum_{i=1}^{N} \|\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^{N} \Big(\sum_{k=1}^{n} (x_k(t_i) - x_k(t_{i-1}))^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

平均値の定理を用いて各 $i = 1, \cdots, N$, $k = 1, \cdots, n$ に対して $t^*_{k,i} \in (t_{i-1}, t_i)$ が存在して

$$x_k(t_i) - x_k(t_{i-1}) = (t_i - t_{i-1})\, \dot{x}_k(t^*_{k,i}).$$

従って上式は

$$L(\Gamma_\Delta) = \sum_{i=1}^{N} (t_i - t_{i-1}) \Big(\sum_{k=1}^{n} \dot{x}_k(t^*_{k,i})^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

他方

$$\|\dot{\mathbf{x}}(t_{i-1})\| = \Big(\sum_{k=1}^{n} \dot{x}_k(t_{i-1})^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$$

だから

$$\mathbf{I}_\Delta := \sum_{i=1}^{N} |t_i - t_{i-1}| \Big(\sum_{k=1}^{n} \dot{x}_k(t_{i-1})^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$$

とおけば，Riemann 積分の定義から

$$\sup_{|\Delta|\to 0} \mathbf{I}_\Delta = \int_{\mathbf{I}} \|\dot{\mathbf{x}}(t)\|\,dt.$$

$\dot{x}_k$ は連続だから $\mathbf{I}$ 上で一様連続，従って任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ がとれて

$$|t_1 - t_2| < \delta \Longrightarrow |\dot{x}_k(t_1) - \dot{x}_k(t_2)| < \varepsilon \qquad (\forall k = 1, \cdots, n).$$

故に

$$\begin{aligned} |\mathbf{I}_\Delta - L(\Gamma_\Delta)| &= \sum_{i=1}^{N} |t_i - t_{i-1}| \left(\left(\sum_{k=1}^{n} \dot{x}_k(t_{k,i}^*)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\sum_{i=1}^{n} \dot{x}_k(t_{i-1})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} |t_i - t_{i-1}| \sum_{k=1}^{n} |\dot{x}_k(t_{k,i}^*) - \dot{x}_k(t_{i-1})| \leq \varepsilon |\mathbf{I}|. \end{aligned}$$

ここでは以下の Schwarz の不等式を用いた．

$$\Big| \|\mathbf{b}\| - \|\mathbf{a}\| \Big| \leq \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| = \left(\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{k=1}^{n} |b_k - a_k|. \qquad \blacksquare$$

2.2　Frenet-Serret の公式

　ここでは $r > 3$ として C^r-級曲線 $\mathbf{x} : \mathbf{I} \to \mathbf{R}^3$, $\mathbf{I} = [a, b]$ を考える．$\mathbf{x}|_{[a,t]}$ の長さを $s(t)$ とおくと

$$s(t) = \int_a^t \|\dot{\mathbf{x}}(u)\|\,du.$$

$\dot{\mathbf{x}}(t) \neq \mathbf{0}$ が全ての $t \in \mathbf{I}$ について成立するから，上式は t に関する狭義単調増加関数である．従って逆関数 $t = t(s)$ が存在する．曲線を弧長によって表し，

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t(s)) = \mathbf{x}(s)$$

と考えると，

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}.$$

従って

$$\left\| \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right\| \cdot \frac{dt}{ds} = 1.$$

すなわち，$\mathbf{x}(s)$ はふたたび曲線となる．この曲線はもとの曲線と同一のものと考えるのが自然である．曲線の弧長 s でパラメータ表示したとき，

$$\mathbf{x}(s)' = \frac{d\mathbf{x}}{ds}$$

のように微分をダッシュで表し，弧長以外のパラメータに関する微分はドットで表すことにする．

曲線 $\mathbf{x}(s)$, $s \in [0, L]$ の速度ベクトルは長さが 1 で，

$$\xi_1(s) := \mathbf{x}(s)'$$

と表すと，これを s で微分して $0 = \langle \xi_1(s), \xi_1(s) \rangle' = 2\langle \xi_1(s), \xi_1'(s) \rangle = 0$ だから $\mathbf{x}'' = \xi_1'$ は ξ_1 と直交している．もしも $\mathbf{x}''(s) \neq \mathbf{0}$ ならば

$$\xi_2 := \frac{\mathbf{x}''}{\|\mathbf{x}''\|} \qquad \|\mathbf{x}''\| := \kappa$$

とおいて，$\mathbf{x}''$ を**曲率ベクトル**または**加速度ベクトル**という．κ を曲線 $\mathbf{x}(s)$ の**曲率**という．$\mathbf{x}'' = \mathbf{0}$ の場合は曲率ベクトルは定義できない．

$\mathbf{x}'' \neq \mathbf{0}$ と仮定して，$\mathbf{R}^3$ 内の正規直交系 $\xi_1(s)$, $\xi_2(s)$, $\xi_3(s)$ を曲線 $\mathbf{x}$ の各点で

$$\xi_3 := \xi_1 \times \xi_2$$

と定義する．このとき $\xi_2' = \alpha\xi_1 + \tau\xi_3$ とおいてこの係数を決めよう．

$$0 = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle' = \kappa + \alpha \Longrightarrow \alpha = -\kappa,$$
$$\xi_3' = \xi_1' \times \xi_2 + \xi_1 \times \xi_2' = \tau\xi_1 \times \xi_3 = -\tau\xi_2.$$

ここで，τ を $\mathbf{x}(s)$ の**捩率**という．$(\mathbf{x}(s), \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ を **Frenet 標構**という．

定理 2.2 (Frenet-Serret の公式)　滑らかな曲線 $\mathbf{x}(s)$ の単位接ベクトルと単位曲率ベクトルを ξ_1, ξ_2 とし，κ, τ は曲率，捩率とするとき，以下の Frenet-Serret の公式が成立する：

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}'(s) &= \xi_1, \\
\xi_1' &= \qquad\quad \kappa\xi_2, \\
\xi_2' &= -\kappa\xi_1 \qquad\quad + \tau\xi_3, \\
\xi_3' &= \qquad\quad -\tau\xi_2.
\end{aligned}$$

問 2.3 (定曲率曲線)　a, $b > 0$ を定数として，常螺旋を

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ a\sin t \\ bt \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbf{R})$$

で与えたとき，この曲線の曲率と捩率を求めよ．

2.3 定曲率曲線

ここでは線形代数学で扱う定係数常微分方程式の解法を復習して，その応用として定曲率曲線の形を決定しよう．

2.3.1 定係数 1 階線形微分方程式系

n 次実正方行列 $A = (a_{ij})$ の定める 1 階線形微分方程式系を考える：

$$\dot{\mathbf{Y}} = A\mathbf{Y}, \qquad \mathbf{Y} := \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix},$$

すなわち

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \qquad (i = 1, \cdots, n). \tag{2.3.1}$$

λ を A の固有値とする．ベクトルの列 $\{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_j\}$ で

$$A\mathbf{u}_1 = \lambda\mathbf{u}_1, \quad A\mathbf{u}_2 = \lambda\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1, \quad \cdots, \quad A\mathbf{u}_j = \lambda\mathbf{u}_j + \mathbf{u}_{j-1}$$

を満たすものが存在するとき $\{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_j\}$ を λ に対する特性列という．特性列は λ が実数のとき全て実ベクトルで，複素数のとき $\overline{\lambda}$ も A の固有値で，$\overline{\lambda}$ に対する特性列は $\{\overline{\mathbf{u}}_1, \cdots, \overline{\mathbf{u}}_j\}$ となる．λ が固有方程式の k 重根のとき，λ に対する特性列は高々 k 個で，特性列を構成するベクトルはちょうど k 個あって，これらは 1 次独立であることが知られている．

$$\begin{aligned} \Psi_m(x) &:= \sum_{r=1}^{m} \frac{x^{m-r}}{(m-r)!}\,\mathbf{u}_r, \\ \mathbf{Y}_m(x) &:= e^{\lambda x}\Psi_m(x) \qquad (m = 1, \cdots, k) \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

とおけば，$\mathbf{Y}_m$ は (2.3.1) の解で

$$\mathbf{Y}_m(0) = \mathbf{u}_m \qquad (m = 1, \cdots, k)$$

を満たすことが計算で解る．実際，$\dot{\mathbf{Y}}_m = \dot{\Psi}_m e^{\lambda x} + \lambda \Psi_m e^{\lambda x}$ だから

$$\dot{\Psi}_m = \frac{x^{m-2}}{(m-2)!}\,\mathbf{u}_1 + \frac{x^{m-3}}{(m-3)!}\,\mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_{m-1}.$$

従って，

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{Y}}_m &= \Big(\frac{x^{m-2}}{(m-2)!}\,\mathbf{u}_1 + \frac{x^{m-3}}{(m-3)!}\,\mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_{m-1}\Big)e^{\lambda x} \\
&\quad + \Big(\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\,\mathbf{u}_1 + \frac{x^{m-2}}{(m-2)!}\,\mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_m\Big)\lambda e^{\lambda x} \\
&= e^{\lambda x}\Big(\lambda \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\,\mathbf{u}_1 + \frac{x^{m-2}}{(m-2)!}\,(\mathbf{u}_1 + \lambda \mathbf{u}_2) + \cdots + (\mathbf{u}_{m-1} + \lambda \mathbf{u}_m)\Big) \\
&= e^{\lambda x} A\Big(\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\,\mathbf{u}_1 + \frac{x^{m-2}}{(m-2)!}\,\mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_m\Big) = A\mathbf{Y}_m.
\end{aligned}$$

特に，A の固有値が全て異なるとき，固有値 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ に対応する固有ベクトルを $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n$ とおけば方程式 (2.3.1) の一般解は

$$\mathbf{Y}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i \mathbf{u}_i e^{\lambda_i x}$$

で与えられる．ここに，$C_1, \cdots, C_n$ は任意定数である．

2.3.2　定曲率空間曲線

空間曲線 $\mathbf{x}(s)$ の Frenet 標構を $(\mathbf{x}(s), \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ とする．$\mathbf{R}^3$ の正規直交基底 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ と 1 点 $P_0 \in \mathbf{R}^3$ を与えたとき，曲率と捩率が一定の空間曲線 $\mathbf{x}(s)$ で

$$\mathbf{x}(0) = P_0, \quad \xi_1(0) = \mathbf{v}_1, \quad \xi_2(0) = \mathbf{v}_2, \quad \xi_3(0) = \mathbf{v}_3 \tag{2.3.3}$$

を満たすものを求めよう．

a, b を正定数として，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & b \\ 0 & -b & 0 \end{pmatrix}, \qquad
\begin{aligned}
\mathbf{x}'(s) &= \xi_1(s), \\
\xi_1'(s) &= \quad a\xi_2(s), \\
\xi_2'(s) &= -a\xi_1(s) \qquad\qquad + b\xi_3(s), \\
\xi_3'(s) &= \quad -b\xi_2(s)
\end{aligned}$$

とおく．A は交代行列だからユニタリー行列によって対角化可能である．$\Xi(s) =$

$(\xi_1\,\xi_2\,\xi_3)$ とおいて Frenet-Serret の公式を行列微分方程式に書き直すと

$$\frac{d\Xi(s)}{ds} = \Xi(s)A^t \Longrightarrow \frac{d\Xi(s)^t}{ds} = A\Xi(s)^t. \tag{2.3.4}$$

I． 行列 A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ と対応する固有ベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ を求める．

A の固有方程式は $\det(A-\lambda E) = -\lambda(\lambda^2+a^2+b^2) = 0$ だから $c := \sqrt{a^2+b^2}$ とおいて $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = ic, \lambda_3 = -ic$ を得る．λ_i に対応する (単位) 固有ベクトル $\mathbf{u}_i$ は

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{b}{c} \\ 0 \\ \dfrac{a}{c} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{\sqrt{2}c} \\ \dfrac{i}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{-b}{\sqrt{2}c} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{\sqrt{2}c} \\ \dfrac{-i}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{-b}{\sqrt{2}c} \end{pmatrix}.$$

従って A を対角化するユニタリー行列 U は以下で与えられる：

$$U = (\mathbf{u}_1\,\mathbf{u}_2\,\mathbf{u}_3) = \begin{pmatrix} \dfrac{b}{c} & \dfrac{a}{\sqrt{2}c} & \dfrac{a}{\sqrt{2}c} \\ 0 & \dfrac{i}{\sqrt{2}} & \dfrac{-i}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{a}{c} & \dfrac{-b}{\sqrt{2}c} & \dfrac{-b}{\sqrt{2}c} \end{pmatrix}.$$

II． 線形微分方程式

$$\frac{d\mathbf{z}(s)}{ds} = A\mathbf{z}(s) \tag{2.3.5}$$

の 1 次独立な解を $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$ とおくと，I よりこれらは

$$\mathbf{z}_1(s) = e^{0s}\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{z}_2(s) = e^{ics}\mathbf{u}_2, \quad \mathbf{z}_3(s) = e^{-ics}\mathbf{u}_3$$

で与えられる．これらの解を並べて作った複素 3 次行列値関数

$$\begin{aligned} Z(s) &:= (\mathbf{z}_1(s)\,\mathbf{z}_2(s)\,\mathbf{z}_3(s)) \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{b}{c} & \dfrac{a}{\sqrt{2}c}\,e^{ics} & \dfrac{a}{\sqrt{2}c}\,e^{-ics} \\ 0 & \dfrac{i}{\sqrt{2}}\,e^{ics} & \dfrac{-i}{\sqrt{2}}\,e^{-ics} \\ \dfrac{a}{c} & \dfrac{-b}{\sqrt{2}c}\,e^{ics} & \dfrac{-b}{\sqrt{2}c}\,e^{-ics} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

は以下の行列微分方程式の解である．

$$\frac{dZ(s)}{ds} = AZ(s). \tag{2.3.7}$$

逆に，(2.3.7) の解を $Z(s) = \Big(\mathbf{z}_1(s)\,\mathbf{z}_2(s)\,\mathbf{z}_3(s)\Big)$ と書けば，$\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$ は (2.3.5) の解となる．任意の 3×3 行列 $C = (\mathbf{w}_1\mathbf{w}_2\mathbf{w}_3)$ に対して $Z(s)C^t$ は (2.3.5) の一般解となることは容易に確かめられる．2つの行列微分方程式 (2.3.4), (2.3.7) を比べて $\Xi(s) = Z(s)^t$ だから，(2.3.5) の解 $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$ に対応する積分定数を $C = (\mathbf{w}_1\mathbf{w}_2\mathbf{w}_3)$ とすると，$\mathbf{z}_i(s) = Z(s)\mathbf{w}_i$ $(i = 1,\,2,\,3)$ より

$$\Xi(s) = (\mathbf{w}_1\,\mathbf{w}_2\,\mathbf{w}_3)Z(s)^t.$$

故に

$$\xi_1 = \frac{b}{c}\mathbf{w}_1 + \frac{a}{\sqrt{2}c}(e^{ics}\mathbf{w}_2 + e^{-ics}\mathbf{w}_3), \tag{2.3.8}$$

$$\xi_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(e^{ics}\mathbf{w}_2 - e^{-ics}\mathbf{w}_3), \tag{2.3.9}$$

$$\xi_3 = \frac{a}{c}\mathbf{w}_1 - \frac{b}{\sqrt{2}c}(e^{ics}\mathbf{w}_2 + e^{-ics}\mathbf{w}_3). \tag{2.3.10}$$

III． (2.3.5) の一般解 $\mathbf{z}_1(s)$, $\mathbf{z}_2(s)$, $\mathbf{z}_3(s)$ が初期条件 (2.3.3) を満たすように積分定数 $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3 \in \mathbf{C}^3$ を定める．上式 (2.3.8), (2.3.9), (2.3.10) は実ベクトルだから各成分が実数で, Frenet 標構の性質から $\langle \xi_i,\,\xi_j\rangle = \delta_{ij}$ $(i,\,j = 1,\,2,\,3)$ だから，これら 9 個の条件式から積分定数 $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3 \in \mathbf{C}^3$ を求めることができる．まず，(2.3.8), (2.3.9), (2.3.10) は 3 個の実ベクトルだから

$$\mathfrak{Im}\left\{\mathbf{w}_1\frac{b}{c} + \frac{a}{\sqrt{2}c}(\mathbf{w}_2e^{ics} + \mathbf{w}_3e^{-ics})\right\} = \mathbf{0}, \tag{2.3.11}$$

$$\mathfrak{Re}\{\mathbf{w}_2e^{ics} - \mathbf{w}_3e^{-ics}\} = \mathbf{0}, \tag{2.3.12}$$

$$\mathfrak{Im}\left\{\mathbf{w}_1\frac{a}{c} - \frac{b}{\sqrt{2}c}(\mathbf{w}_2e^{ics} + \mathbf{w}_3e^{-ics})\right\} = \mathbf{0}. \tag{2.3.13}$$

故に $\mathfrak{Im}\ \mathbf{w}_1 = \mathbf{0}$ となって $\mathbf{w}_1 \in \mathbf{R}^3$ を得る．次に $\langle \xi_1,\,\xi_1\rangle = \xi_1^*\xi_1 = 1$ を計算して

$$\begin{aligned}
1 = {}& \frac{b^2}{c^2}|\mathbf{w}_1|^2 + \frac{a^2}{2c^2}(|\mathbf{w}_2|^2 + |\mathbf{w}_3|^2)\\
&+ \frac{ab}{\sqrt{2}c^2}\Big[e^{-ics}\{\langle\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\rangle + \langle\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_3\rangle\} + e^{ics}\{\langle\mathbf{w}_3,\mathbf{w}_2\rangle + \langle\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\rangle\}\Big]\\
&+ \{e^{-2ics} + e^{2ics}\}\langle\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3\rangle.
\end{aligned}$$

これより

$$\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle = 0 \qquad (i \neq j), \tag{2.3.14}$$

$$\frac{b^2}{c^2}|\mathbf{w}_1|^2 + \frac{a^2}{2c^2}(|\mathbf{w}_2|^2 + |\mathbf{w}_3|^2) = 1 \tag{2.3.15}$$

を得る．更に $\langle \xi_2, \xi_2 \rangle = \xi_2^* \xi_2 = 1$ より

$$1 = \frac{1}{2}\{|\mathbf{w}_2|^2 - \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \rangle (e^{2ics} + e^{-2ics}) + |\mathbf{w}_3|^2\}.$$

従って

$$|\mathbf{w}_2|^2 + |\mathbf{w}_3|^2 = 2. \tag{2.3.16}$$

(2.3.16) と (2.3.15) から $|\mathbf{w}_1| = 1$ を得る．最後に $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = 0$ より

$$\frac{a}{2c}(|\mathbf{w}_2|^2 - |\mathbf{w}_3|^2) = 0.$$

従って $|\mathbf{w}_2| = |\mathbf{w}_3| = 1$ を得る．(2.3.15) と (2.3.16) に上で求めた関係式を代入して

$$\mathfrak{Im}(e^{ics}\mathbf{w}_2 + e^{-ics}\mathbf{w}_3) = \mathfrak{Re}(e^{ics}\mathbf{w}_2 - e^{-ics}\mathbf{w}_3) = \mathbf{0}$$

を得る．これより

$$\mathfrak{Im}(\mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3) = \mathfrak{Re}(\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_3) = \mathbf{0}.$$

従って

$$\mathbf{w}_2 = \overline{\mathbf{w}}_3. \tag{2.3.17}$$

$\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3 \in \mathbf{C}^3$ は直交する単位ベクトルで互いに共役だから，直交する単位実ベクトル $\mathbf{b}$, $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^3$ で

$$\mathbf{w}_2 = \frac{\mathbf{b} + i\mathbf{c}}{\sqrt{2}}, \qquad \mathbf{w}_3 = \frac{\mathbf{b} - i\mathbf{c}}{\sqrt{2}} \tag{2.3.18}$$

を満たすものが存在する．ここで $\mathbf{a} := \mathbf{w}_1 \in \mathbf{R}^3$ と (2.3.18) を (2.3.8), (2.3.9), (2.3.10) に代入して

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{b}{c}\mathbf{a} + \frac{a}{\sqrt{2}c}\left(e^{ics}\frac{\mathbf{b} + i\mathbf{c}}{\sqrt{2}} + e^{-ics}\frac{\mathbf{b} - i\mathbf{c}}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{b}{c}\mathbf{a} + \frac{a}{c}(\mathbf{b}\cos cs - \mathbf{c}\sin cs),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\xi_2 &= \frac{i}{\sqrt{2}}\left(e^{ics}\frac{\mathbf{b}+i\mathbf{c}}{\sqrt{2}} - e^{-ics}\frac{\mathbf{b}-i\mathbf{c}}{\sqrt{2}}\right)\\
&= -(\mathbf{b}\sin cs + \mathbf{c}\cos cs),\\
\xi_3 &= \frac{a}{c}\mathbf{a} - \frac{b}{\sqrt{2}c}\left(e^{ics}\frac{\mathbf{b}+i\mathbf{c}}{\sqrt{2}} + e^{-ics}\frac{\mathbf{b}-i\mathbf{c}}{\sqrt{2}}\right)\\
&= \frac{a}{c}\mathbf{a} - \frac{b}{c}(\mathbf{b}\cos cs - \mathbf{c}\sin cs).
\end{aligned}
$$

上述の準備のもとに，初期条件 (2.3.3) を実現する任意常数 $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ を定める．上で求めた式で $s=0$ のとき初期条件は

$$
\begin{aligned}
\xi_1(0) &= \frac{b}{c}\mathbf{a} + \frac{a}{c}\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1,\\
\xi_2(0) &= -\mathbf{c} = \mathbf{v}_2,\\
\xi_3(0) &= \frac{a}{c}\mathbf{a} - \frac{b}{c}\mathbf{b} = \mathbf{v}_3
\end{aligned}
$$

だから，積分定数 $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ は

$$
\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &:= \mathbf{a} = \frac{b\mathbf{v}_1 + a\mathbf{v}_3}{c},\\
\mathbf{w}_2 &:= \frac{\mathbf{b}+i\mathbf{c}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{b\mathbf{v}_1 + a\mathbf{v}_3}{c} - i\mathbf{v}_2\right),\\
\mathbf{w}_3 &:= \frac{\mathbf{b}-i\mathbf{c}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{b\mathbf{v}_1 + a\mathbf{v}_3}{c} + i\mathbf{v}_2\right)
\end{aligned}
$$

と定めればよい．このとき，求める空間曲線は以下で与えられる：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(s) &= \int_0^s \xi_1(s)\,ds + P_0\\
&= \frac{b}{c}s\mathbf{a} + \frac{a}{\sqrt{2}c^2}\Bigl(\mathbf{b}\sin cs + \mathbf{c}\cos cs\Bigr) + P_0.
\end{aligned}
$$

問 2.4　定曲率平面曲線は円であることを証明せよ．

問 2.5　行列 A が次の場合に，微分方程式 $\dot{\mathbf{Y}} = A\mathbf{Y}$ を解け．

$$
A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

定理 2.6　$\mathbf{x}$ は滑らかな曲線とする．このとき，以下が成立する．

(i)　曲率が至るところ 0 である曲線は直線またはその一部である．

(ii)　曲率と捩率が定数の曲線は常螺旋である．

(iii)　曲率は至るところ正で，捩率が恒等的に 0 の曲線は平面曲線である．

2.4　接触平面，法平面，展直平面

曲線 $\mathbf{x} : [0, L] \to \mathbf{R}^3$ は弧長をパラメータにとり，更に

$$\kappa \neq 0, \qquad \tau \neq 0$$

と仮定する．このとき，接触平面，法平面，展直平面を以下のように定義する．

定義 2.7　接触平面，法平面，展直平面

(i)　曲線上の異なる 3 点 $\mathbf{x}(s)$, $\mathbf{x}(s+h)$, $\mathbf{x}(s+k)$ を通る平面の h, $k \to 0$ としたときの極限平面 $\Pi(\mathbf{x}(s))$ を点 $\mathbf{x}(s)$ における**接触平面**という．

(ii)　点 $\mathbf{x}(s)$ における平面 $N(\mathbf{x}(s))$ で $\xi_2(s)$, $\xi_3(s)$ によって張られるものを**法平面**という．

(iii)　点 $\mathbf{x}(s)$ における平面 $Q(\mathbf{x}(s))$ で $\xi_1(s)$, $\xi_3(s)$ によって張られるものを**展直平面**という．

命題 2.8　$\kappa \neq 0, \tau \neq 0$ を仮定する．このとき接触平面 $\Pi(\mathbf{x}(s))$ の方程式は $\Pi(\mathbf{x}(s))$ 上の任意の点を $\mathbf{P}$ とすれば

$$|\mathbf{P} - \mathbf{x}(s)\ \mathbf{x}'(s)\ \mathbf{x}''(s)| = 0.$$

証明　3 点 $\mathbf{x}(s)$, $\mathbf{x}(s+h)$, $\mathbf{x}(s+k)$ が定める平面を $\Pi(h, k)$ とせよ．$\Pi(h, k)$ の正規直交基底を $\{\mathbf{e}_1(h, k), \mathbf{e}_2(h, k)\}$ とする．ここに，h, k は十分に小さいから $\mathbf{x}'(s)$ の $\Pi(h, k)$ への直交射影は 0 でない．この方向に $\mathbf{e}_1(h, k)$ をとる．$\Pi(h, k)$ の h, $k \to 0$ としたときの極限が存在するための必要十分条件は，h, $k \to 0$ としたときの $\mathbf{e}_2(h, k)$ の極限が存在することである．$\mathbf{e}_2 := \lim_{h,k\to 0} \mathbf{e}_2(h, k)$, $\mathbf{e}_1 := \mathbf{x}'(s)$ とおく．$\Pi(\mathbf{x}(s))$ の任意の点 $\mathbf{P}$ を $\mathbf{P} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$ と表すと，対応する $\Pi(h, k)$ 上の点 $\mathbf{P}(h, k) := a\mathbf{e}_1(h, k) + b\mathbf{e}_2(h, k)$ は $\lim_{h,k\to 0} \mathbf{P}(h, k) = \mathbf{P}$ を満たす．このとき，

$$|\mathbf{P}(h, k) - \mathbf{x}(s)\ \mathbf{x}(s+h) - \mathbf{x}(s)\ \mathbf{x}(s+k) - \mathbf{x}(s)| = 0 \qquad (0 < |h|, |k| \ll 1)$$

が成立するから，h, $k \to 0$ とした極限で求める式を得る．　∎

2.4.1　接触円と接触球

定義 2.9 (接触円と接触球)　$\kappa \neq 0, \tau \neq 0$ を仮定する．

(i)　曲線上の異なる 3 点 $\mathbf{x}(s)$, $\mathbf{x}(s+h)$, $\mathbf{x}(s+k)$ を通る円の中心を $C(h, k)$, 半径を $R(h, k)$ とする．この円の極限を**接触円**という．

(ii)　曲線上の異なる 4 点 $\mathbf{x}(s)$, $\mathbf{x}(s+h_1)$, $\mathbf{x}(s+h_2)$, $\mathbf{x}(s+h_3)$ を通る球面の中心を $C(h_1, h_2, h_3)$, 半径を $R(h_1, h_2, h_3)$ とする．$h_1, h_2, h_3 \to 0$ としたときの球面の極限を**接触球面**という．

定理 2.10　$\kappa \neq 0, \tau \neq 0$ を仮定する．このとき接触円の中心 C と半径 R は

$$C = \lim_{h,k\to 0} C(h, k) = \mathbf{x}(s) + \frac{1}{\kappa}\xi_2(s),$$
$$R = \lim_{h,k\to 0} R(h, k) = \frac{1}{\kappa}.$$

証明　明らかに $C(h, k) - \mathbf{x}(s)$ は $\mathbf{x}(s+h) - \mathbf{x}(s)$ と $\mathbf{x}(s+k) - \mathbf{x}(s)$ の 1 次結合だから

$$C = \lim_{h,k\to 0} C(h, k) \in \Pi(\mathbf{x}(s)).$$

従って $|C-\mathbf{x}(s)\ \xi_1(s)\ \xi_2(s)| = 0$ となって，ある $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ に対して $C-\mathbf{x}(s) = \alpha\xi_1(s) + \beta\xi_2(s)$ と書ける．さて，関数 $h \mapsto \|C - \mathbf{x}(s+h)\|^2 - R^2$ は $h = 0$ で 3 重根をもつから

$$0 = \frac{d}{dh}\|C - \mathbf{x}(s+h)\|^2_{|h=0} = \langle C - \mathbf{x}(s), -\xi_1(s)\rangle,$$
$$0 = \frac{d^2}{dh^2}\|C - \mathbf{x}(s+h)\|^2_{|h=0} = 1 + \langle C - \mathbf{x}(s), -\kappa\xi_2(s)\rangle.$$

これより $\alpha = 0, \beta = \dfrac{1}{\kappa}$ だから接触円の中心と半径は以下である．

$$C - \mathbf{x}(s) = \frac{1}{\kappa}\xi_2(s), \qquad R = \frac{1}{\kappa}.$$

∎

定理 2.11　$\kappa \neq 0, \tau \neq 0$ を仮定する．このとき接触球の中心 C と半径 R は

$$C = \lim_{h_1,h_2,h_3\to 0} C(h_1, h_2, h_3) = \mathbf{x}(s) + \frac{1}{\kappa}\xi_2 - \frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\xi_3,$$
$$R = \lim_{h_1,h_2,h_3\to 0} R(h_1, h_2, h_3) = \sqrt{\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)^2}.$$

証明　関数 $f(h) := \|C - \mathbf{x}(s+h)\|^2 - R^2$ は $h = 0$ で 4 重根を持つから

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0.$$

$\mathbf{z} := C - \mathbf{x}(s)$ とおけば

$$f'(0) = -2\langle \mathbf{z},\, \xi_1 \rangle, \qquad f''(0) = 2(1 - \kappa\langle \mathbf{z},\, \xi_2 \rangle),$$
$$f'''(0) = -2(\kappa'\langle \mathbf{z},\, \xi_2 \rangle - \kappa^2\langle \mathbf{z},\, \xi_1 \rangle + \kappa\tau\langle \mathbf{z},\, \xi_3 \rangle)$$

だから

$$\mathbf{z} = \frac{1}{\kappa}\,\xi_2 - \frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\,\xi_3.$$

従って

$$R = \sqrt{\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)^2}.$$ ∎

問 2.12 曲線 $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{(1+s)^{\frac{3}{2}}}{3} \\ \dfrac{(1-s)^{\frac{3}{2}}}{3} \\ \dfrac{s}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ の接触平面，接触円の中心と半径，および接触球の中心と半径を求めよ.

2.4.2 Bouquet の公式

弧長をパラメータとする滑らかな曲線 $\mathbf{x}(s)$, $s \in [0, L]$ を点 $\mathbf{x}(s)$ のまわりで級数展開する．曲率および捩率は $\kappa(s)$, $\tau(s) \neq 0$ と仮定して，Frenet-Serret の公式から

(i) $\mathbf{x}' = \xi_1$.

(ii) $\mathbf{x}'' = \xi_1' = \kappa\xi_2$.

(iii) $\mathbf{x}''' = -\kappa^2\xi_1 + \kappa'\xi_2 + \kappa\tau\xi_3$.

(iv) $\mathbf{x}^{(4)} = -3\kappa\kappa'\xi_1 + (-\kappa^3 + \kappa'' - \kappa^2\tau)\,\xi_2 + (\kappa'\tau + (\kappa\tau)')\,\xi_3$.

これを用いて h を十分小さな数として $\mathbf{x}(s+h) - \mathbf{x}(s)$ を展開する.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}(s+h) - \mathbf{x}(s) \\
&= h\xi_1 + \frac{h^2}{2}\kappa\xi_2 + \frac{h^3}{6}\Big(-\kappa^2\xi_1 + \kappa'\xi_2 + \kappa\tau\xi_3\Big) + [h^4]
\end{aligned}$$
$$= \left(h - \frac{\kappa^2}{6}h^3\right)\xi_1 + \left(\frac{\kappa}{2}h^2 + \frac{\kappa'}{6}h^3\right)\xi_2 + \frac{\kappa\tau}{6}h^3\xi_3 + [h^4].$$

ここで，$[h^4]$ は h に関する 4 次以上の項をまとめたものである．ξ_1, ξ_2, ξ_3 をそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸と考えてこの曲線を接触平面 (xy-平面)，法平面 (yz-

平面), 展直平面 (zx-平面) に射影すれば, 高次接触を無視して

$$x = h, \qquad y = \frac{\kappa}{2}x^2, \qquad z^2 = \frac{2\tau^2}{9\kappa}y^3, \qquad z = \frac{\kappa\tau}{6}x^3$$

を得る. これらを Bouquet の公式という. 曲線の局所的な性質がこの公式によってわかる [Figure 2.4.2].

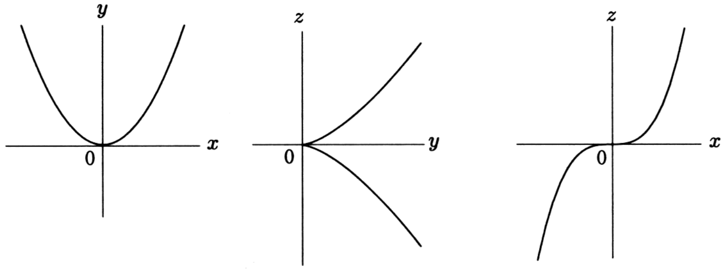


Figure 2.4.2

2.4.3 自然方程式

曲線を決定する要素は曲率と捩率である. 2 つの関数を与えたとき, それらを曲率と捩率とする曲線が運動を除いて決まる. この意味において, 曲率と捩率を与える式が曲線の自然方程式とよばれる.

定理 2.13　2 つの空間曲線 $\mathbf{x}, \mathbf{x}^* : \mathbf{I} \to \mathbf{R}^3$ の Frenet 標構を $(\mathbf{x}, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $(\mathbf{x}^*, \xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*)$ とする. これらの曲率と捩率をそれぞれ κ, τ および κ^*, τ^* とおく. もしも各点 $s \in \mathbf{I}$ で $\kappa(s) = \kappa^*(s)$, $\tau(s) = \tau^*(s)$ ならば, 2 つの曲線は $\mathbf{R}^3$ の運動によって重ね合わせることができる.

証明　$s_0 \in \mathbf{I}$ を任意に固定する. $\mathbf{R}^3$ の平行移動 P によって

$$P\mathbf{x}(s_0) = \mathbf{x}^*(s_0)$$

とせよ. 次に $\mathbf{R}^3$ の回転 R によって

$$R\xi_i(s_0) = \xi_i^*(s_0) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

とする. $\mathbf{R}^3$ の運動 M を

$$M := R \circ P$$

とおくと,

$$M\mathbf{x}(s_0) = \mathbf{x}^*(s_0), \qquad M\xi_i(s_0) = \xi_i^*(s_0) \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

が成立する．ここで簡単のため $M\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(s)$ と略記する．

関数 $f\ :\ \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ を

$$f = \xi_1 \cdot \xi_1^* + \xi_2 \cdot \xi_2^* + \xi_3 \cdot \xi_3^*$$

と定義すると，Frenet-Serret の公式から

$$f'(s) = 0 \qquad (\forall s \in \mathbf{I}).$$

初期条件から s_0 においては $f(s_0) = 3$ が成立しているから

$$f(s) = 3 \qquad (\forall s \in \mathbf{I}).$$

故に $\mathbf{I}$ 上で

$$\xi_1 = \xi_1^*, \qquad \xi_2 = \xi_2^*, \qquad \xi_3 = \xi_3^*.$$

従って

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(s) &= \int_{s_0}^{s} \xi_1(u)\,du + \mathbf{x}(s_0) \\ &= \int_{s_0}^{s} \xi_1^*(u)\,du + \mathbf{x}^*(s_0) = \mathbf{x}^*(s) \qquad (\forall s \in \mathbf{I}).\end{aligned}$$

∎

第3章　曲面の微分幾何学

曲線の場合は曲線の曲率と捩率で曲線の形が決定できることを見た．特に，定曲率空間曲線は常螺旋 (helix) であることが分かった．曲面の場合には様々な曲率が定義される．$\mathbf{R}^3$ 内の曲面の形を曲率の条件下で決定しようと試みると，曲率に対する理解が深まるだろう．局所的な議論から始めて，位相空間や Riemann 幾何学の基礎知識を準備し，第 10 章から第 14 章までの議論の中で，コンパクト性や完備性の条件と様々な曲率に関する条件下で曲面の形を決定する．形を決めることができない場合には，最後の Appendix III に述べる Chern-Lashof の定理のように曲面の位相や微分構造が決定されるだろう．

3.1　$\mathbf{R}^n$ の位相の復習

ここではまず $\mathbf{R}^n$ の位相について簡単に復習する．$\mathbf{R}^n$ は通常のドット積によって内積が定義されている．$\mathbf{R}^n$ の 2 点 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ の間の距離 d を

$$d(\mathbf{x},\, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

と定義する．ここに $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}$ はベクトル $\mathbf{x}$ のノルムである．距離空間の位相空間としての基本近傍基は同心距離球によって定義される．点 $P \in \mathbf{R}^n$ を中心とする半径 $r > 0$ の距離球を $B(P\,;\, r)$ または $U_r(P)$ と書く．集合 $U \subset \mathbf{R}^n$ はその任意の点 $P \in U$ を中心とする距離球で U に含まれるものが存在するとき，開集合であるという．集合 $A \subset \mathbf{R}^n$ の補集合 A^c を $A^c := \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \,|\, \mathbf{x} \notin A\}$ によって定義する．集合 $B \subset \mathbf{R}^n$ はその補集合が開集合であるとき，閉集合であるという．集合 $A \subset \mathbf{R}^n$ の点列 $\{q_j\}_{j=1,2,\ldots}$ とある点 $q \in \mathbf{R}^n$ を考える．点列 $\{q_j\}_{j=1,2,\ldots}$ が $\displaystyle\lim_{j\to\infty} \|q_j - q\| = 0$ を満たすとき，点列 $\{q_j\}_{j=1,2,\ldots}$ が q に収

束するという．このとき，q を A の集積点と呼んで $\lim_{j\to\infty} q_j = q$ と表す．A の集積点全体の集合を $\overline{A}$ と書く．$\overline{A}$ は閉集合である．A の点 $a \in A$ で a のまわりの球近傍 $U_\varepsilon(a)$ で A に含まれるのもが存在するとき，a を A の内点と呼ぶ．A の内点全体の集合を内点集合と呼んで A° と書く．集合 A の内点集合は開集合である．$A \subset \mathbf{R}^n$ に属さない点 x で $U_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$ を満たす距離球 $U_\varepsilon(x)$ が存在するとき，x を A の外点という．A の内点でも外点でもない点を A の境界点と呼ぶ．A の境界点全体の集合を ∂A と表す．位相に関する詳しい事実は 7 章および 8 章で述べるが，$\mathbf{R}^n$ の位相に関する以下の事実はよく知られている．

(i) $\mathbf{R}^n$ は加算個の近傍基を持つ (第 2 可算公理を満たす)．

(ii) $\mathbf{R}^n$ は距離空間として完備である．

(iii) $\mathbf{R}^n$ は稠密な可算個集合を持つ．

3.2 曲面の概念

$\mathbf{R}^n$ 内の連結な開集合を領域という．平面 $\mathbf{R}^2$ 内の領域 $D \subset \mathbf{R}^2$ 上で定義された C^r-級ベクトル値関数 $\mathbf{x} : D \to \mathbf{R}^3$ を成分で書いて

$$\mathbf{x}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} x^1(u^1, u^2) \\ x^2(u^1, u^2) \\ x^3(u^1, u^2) \end{pmatrix} \qquad ((u^1, u^2) \in D)$$

とする．曲面の定義は後述するとして，空間図形としての曲面 (またはその一部) はベクトル値関数で表されると考える．曲面の一部 (または曲面片) を曲面の正則表示といって以下のように定義する．

定義 3.1 (曲面の正則表示) C^r-級ベクトル値関数 $\mathbf{x} : D \to \mathbf{R}^3$ が以下の条件を満たすとき，**曲面の C^r-級正則表示**という．

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial x^1}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial x^2}{\partial u^1} & \dfrac{\partial x^2}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial x^3}{\partial u^1} & \dfrac{\partial x^3}{\partial u^2} \end{pmatrix} = 2 \qquad ((u^1, u^2) \in D).$$

$$\mathbf{x}_i := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial u^i} \\ \dfrac{\partial x^2}{\partial u^i} \\ \dfrac{\partial x^3}{\partial u^i} \end{pmatrix} \qquad (i = 1, 2)$$

とおくとき，曲面の単位法線ベクトル $\mathbf{e}$ を

$$\mathbf{e} := \frac{\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\|}$$

と定義する．

例 3.2 (グラフ曲面)　$D \subset \mathbf{R}^2$ で定義された C^r-級関数を $f : D \to \mathbf{R}$ とすると，f のグラフ $\mathbf{x} : D \to \mathbf{R}^3$ は曲面の正則表示である．実際

$$\mathbf{x}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ f(u^1, u^2) \end{pmatrix} \qquad ((u^1, u^2) \in D)$$

だから

$$\mathbf{x}_1 := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_2 := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

とおけば

$$\operatorname{rank}(\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix} = 2 \qquad ((u^1, u^2) \in D).$$

従ってこれは曲面片である．

曲面片の表し方は沢山ある．いま，pq-平面内の領域 Ω と $(u_0, v_0) \in D$ の近傍 U の間の座標変換 $(p, q) \mapsto (u, v)$ を

$$u = u(p, q), \qquad v = v(p, q), \qquad \frac{\partial(u, v)}{\partial(p, q)} \neq 0 \qquad (\forall (p, q) \in \Omega)$$

で与えたとしよう．このとき

$$\mathbf{y} : \Omega \to \mathbf{R}^3, \qquad \mathbf{y}(p, q) := \mathbf{x}(u(p, q), v(p, q))$$

はこの曲面片の一部分 $\mathbf{x}(U)$ の正則表示である．従ってこのような正則表示の

全てを集めて曲面全体が覆われていると考えるのが自然だろう．この意味で球面全体が 1 つの曲面と考えられるだろう．

例 3. 3 (標準的球面)　半径 a の球面 $\mathbf{S}^2(a) := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 = a^2\} \subset \mathbf{R}^3$ が曲面であることを示す．$D_{xy} := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 < a^2, z = 0\}$ として $f : D_{xy} \to \mathbf{R}$ を

$$f(x, y) := \pm\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \qquad ((x, y) \in D_{xy})$$

と定義すると, 例 3.2 からこれは曲面片の正則表示で, 北半球と南半球を覆い, 赤道は覆われていない．この曲面片は $\mathbf{S}^2(a) \setminus \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2+y^2 = a^2, z = 0\}$ となる．球面全体をひとつの正則表示で表すことはできない．そこで他の正則表示

$$\begin{aligned} g(y, z) &:= \pm\sqrt{a^2 - y^2 - z^2} \qquad ((y, z) \in D_{yz}), \\ h(z, x) &:= \pm\sqrt{a^2 - z^2 - x^2} \qquad ((z, x) \in D_{zx}) \end{aligned}$$

をとって初めて球面全体がどれかの正則表示で表せたことになる．

例 3. 4 (Monge patch)　曲面の正則表示を $\mathbf{x} : U \to \mathbf{R}^3$ とする．このとき U の任意の点 $(u_0, v_0) \in U$ に対して近傍 $U_0 \subset U$ と関数 f が存在して，$\mathbf{x}(U_0)$ は関数 $f : U_0 \to \mathbf{R}$ のグラフとして表せる．このグラフ表示を **Monge Patch** という．

実際，$\mathrm{rank}(\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2) = 2$ だから，一般性を失わず (u_0, v_0) の近傍で

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} & \dfrac{\partial x_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial u} & \dfrac{\partial x_2}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

と仮定してよい．ここで逆関数定理から (u_0, v_0) の近傍 $U_0 \subset U$ と $(x_1(u_0, v_0), x_2(u_0, v_0))$ の近傍 $W \subset x_1x_2$-平面が存在して，u, v が x_1, x_2 の関数として表せて，曲面の点 $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ の近傍の点は

$$\begin{aligned} \mathbf{x}|_{U_0}(u, v) &= \mathbf{x}(u(x_1, x_2), v(x_1, x_2)) \\ &= x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3(x_1, x_2)\mathbf{e}_3 \qquad ((x_1, x_2) \in W) \end{aligned}$$

となる．このとき関数 f は $f = x_3(x_1, x_2)$ である．

定義 3. 5 (曲面の定義)　$\mathbf{R}^3$ 内の集合 S は，以下の性質を満たすとき**曲面**と

いう．

(i)　各点 $P \in S$ に対して曲面の正則表示 $\mathbf{x} : D \to \mathbf{R}^3$ と D の点 $(u_0, v_0) \in D$ が存在して

$$\mathbf{x}(D) \subset S, \qquad P = \mathbf{x}(u_0, v_0).$$

(ii)　S の任意の2つの正則表示 $\mathbf{x} : D \to \mathbf{R}^3$, $\mathbf{y} : E \to \mathbf{R}^3$ が

$$\mathbf{x}(D) \cap \mathbf{y}(E) \neq \emptyset$$

を満たすとき，$\mathbf{x}(D) \cap \mathbf{y}(E)$ の各点 $Q \in S$ のまわりで $\mathbf{x}^{-1}(Q) = (u_0, v_0)$ の D における近傍 $W \subset D$ と $\mathbf{y}^{-1}(Q) = (x_0, y_0)$ の E における近傍 $U \subset E$ が存在して，

$$\mathbf{x}(W) = \mathbf{y}(U)$$

かつ

$$(\mathbf{y}|_U)^{-1}_{\circ}(\mathbf{x}|_W) : W \to U, \qquad (\mathbf{x}|_W)^{-1}_{\circ}(\mathbf{y}|_U) : U \to W$$

はともに正則な座標変換である．

曲面の位相については10章で述べる．曲面の具体例を見よう．関数の等位集合で曲面を表す方法も有効である．$\Omega \subset \mathbf{R}^3$ を領域として Ω 上で定義された滑らかな関数 $f : \Omega \to \mathbf{R}$ の点 $(x, y, z) \in \Omega$ における勾配ベクトルを

$$\nabla f(x, y, z) := \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$$

によって定義する．

定義 3.6　$\Omega \subset \mathbf{R}^3$ を領域として $f : \Omega \to \mathbf{R}$ は C^r-級関数とする．

(i)　$M_c^c(f) := \{(x, y, z) \in \Omega \mid f(x, y, z) = c\}$ を f の c-**等位集合** (c-level set) という．

(ii)　$\nabla f(x, y, z) \neq \mathbf{0}$, $\forall (x, y, z) \in \Omega$ が成立するとき，等位集合 $M_c^c(f)$ は C^r-級曲面である．このとき勾配ベクトルは曲面の法線ベクトルとなる．

$f : \Omega \to \mathbf{R}$ を C^r 級関数とし，c を正則値とせよ．すなわち，等位集合 $M_c^c(f)$ 上の任意の点 P を

$$P := \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

とおくと，$\nabla f(P) \neq \mathbf{0}$ が成立する．一般性を失わず

$$f_3(P) := \frac{\partial f}{\partial z}(P) \neq 0$$

と仮定してよい．ここに $f_1 := \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $f_2 := \dfrac{\partial f}{\partial y}$ である．このとき陰関数定理から (x_0, y_0) のまわりの近傍 $U \subset \mathbf{R}^2$ と C^r-級関数 $\varphi : U \to \mathbf{R}$ が存在して

$$\varphi(x_0, y_0) = z_0, \qquad f(x, y, \varphi(x, y)) = c \qquad ((x, y) \in U)$$

を満たす．このとき，ベクトル値関数 $\mathbf{x} : U \to \mathbf{R}^3$ を

$$\mathbf{x}(x, y) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ \varphi(x, y) \end{pmatrix}$$

と定義すれば，$\mathbf{x} : U \to \mathbf{R}^3$ は曲面の正則表示で

$$\mathbf{x}(x_0, y_0) = P, \qquad \mathbf{x}(U) \subset M_c^c(f)$$

を満たすことが分かる．

次に点 $P \in M_c^c(f)$ のまわりの 2 つの正則表示 $\mathbf{x} : D \to \mathbf{R}^3$ と $\mathbf{y} : E \to \mathbf{R}^3$ が $P \in \mathbf{x}(D) \cap \mathbf{y}(E)$ を満たすとき，$P = \mathbf{x}(u_0, v_0) = \mathbf{y}(p_0, q_0)$ とおく．正則表示の定義から $\mathrm{rank}(\mathbf{x}_u\ \mathbf{x}_v) = 2$，すなわち

$$|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|(u_0, v_0) \neq 0, \qquad |\mathbf{y}_p \times \mathbf{y}_q|(p_0, q_0) \neq 0.$$

逆関数定理から (u_0, v_0), (p_0, q_0) のまわりの近傍 $\Omega \subset D$, $\Lambda \subset E$ と関数 $u, v : \Lambda \to \mathbf{R}$, $p, q : \Omega \to \mathbf{R}$ が存在して [Figure 3.2]

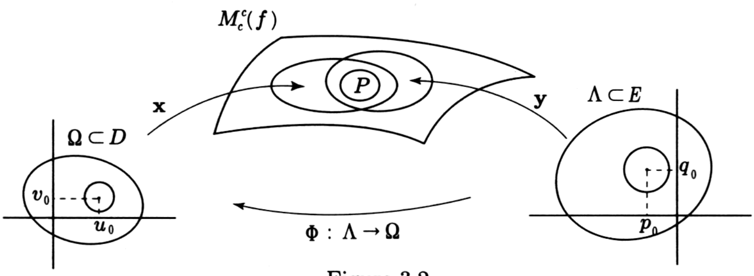


Figure 3.2

$$u = u(p,\,q), \quad v = v(p,\,q) \qquad ((p,\,q) \in \Lambda),$$
$$u_0 = u(p_0,\,q_0), \quad v_0 = v(p_0,\,q_0), \tag{3.2.1}$$
$$p = p(u,\,v), \quad q = q(u,\,v) \qquad ((u,\,v) \in \Omega),$$
$$p_0 = p(u_0,\,v_0), \quad q_0 = q(u_0,\,v_0) \tag{3.2.2}$$

を満たす．この対応は

$$\Phi := (\mathbf{x}|_{\Omega})^{-1} \circ (\mathbf{y}|_{\Lambda}) \,:\, \Lambda \to \Omega, \tag{3.2.3}$$
$$\Phi^{-1} := (\mathbf{y}|_{\Lambda})^{-1} \circ (\mathbf{x}|_{\Omega}) \,:\, \Omega \to \Lambda \tag{3.2.4}$$

によって得られる．明らかに $P \in \mathbf{x}(\Omega) = \mathbf{y}(\Lambda) \subset M_c^c(f)$ で，Φ, Φ^{-1} によって正則な座標変換が得られる．

3.3　向き付け可能な曲面

ある集合族の各元を表わす集合を**添数集合** (index set) という．通常は I で添数集合を表わす．曲面 M の向き付けについて考えよう．$\{(D_\alpha,\,\mathbf{x}_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ は M の正則表示全体の族で，$\mathbf{x}_\alpha(D_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(D_\beta) \neq \emptyset$ を満たす任意の $\alpha,\,\beta \in I$ に対して，座標変換の変換行列式が

$$\frac{\partial(x_\alpha^1,\,x_\alpha^2)}{\partial(x_\beta^1,\,x_\beta^2)} > 0 \qquad (\alpha,\,\beta \in I) \tag{3.3.1}$$

を満たすものが存在するとき，M は**向き付け可能**であるという．

命題 3.7　曲面 M が向き付け可能であるための必要十分条件は M が単位法線ベクトル場 $\mathbf{e}$ を許容することである．

証明　定義 (3.3.1) を満たすような M の正則表示の族 $\{(D_\alpha,\,\mathbf{x}_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ が存在すると仮定する．各々の $\mathbf{x}_\alpha(D_\alpha)$ 上で単位法線ベクトル場 $\mathbf{e}_\alpha$ を

$$\mathbf{e}_\alpha := \frac{(\mathbf{x}_\alpha)_1 \times (\mathbf{x}_\alpha)_2}{\|(\mathbf{x}_\alpha)_1 \times (\mathbf{x}_\alpha)_2\|}$$

と定義する．このとき，$\mathbf{x}_\alpha(D_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(D_\beta) \neq \emptyset$ ならば，共通集合上で $\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_\beta$ となって，この単位法線ベクトル場は M 全体で定義される．逆に，M が単位法線ベクトル場 $\mathbf{e}$ を許容すると仮定する．M の正則表示の族 $\{(D_\alpha,\,\mathbf{x}_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ を各々の $(D_\alpha,\,\mathbf{x}_\alpha)$ に対して

$$|(\mathbf{x}_\alpha)_1 (\mathbf{x}_\alpha)_2\ \mathbf{e}| > 0$$

を満たすように選べば，ベクトル外積の定義によって (3.3.1) が成立し，M が向き付け可能となる． ∎

M の単位法線ベクトル場 $\mathbf{e}$ が存在するとせよ．正則表示 $(D, \mathbf{x})$ は $\mathbf{e} = \dfrac{\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\|}$ を満たすように選んだとき，M 上の各点で $\mathbf{R}^3$ の基底 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{e}\}$ が**空間の正の向きに同調している**という．

例 3.8 球面や回転トーラスは (コンパクト連結で) 向き付け可能な曲面である．曲面のコンパクト性や連結性は後述する．

例 3.9 (Möbius の帯) Möbius の帯は幅が一定の帯の両端を 180° 捻って張り合わせた曲面である．図のように，この曲面は向き付け可能でない [Figure 3.3].

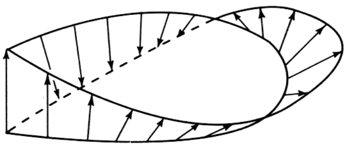


Figure 3.3 Möbius strip の概形

3.4 曲面の接平面と法線

$\mathbf{x} : D \to \mathbf{R}^3$ を曲面の正則表示としたとき，2 つの座標曲線 $u^1 \mapsto \mathbf{x}(u^1, u^2)$, $u^2 \mapsto \mathbf{x}(u^1, u^2)$ の速度ベクトル $\mathbf{x}_1(u^1, u^2)$, $\mathbf{x}_2(u^1, u^2)$ は各点で平面を定める．この平面を曲面の点 $\mathbf{x}(u^1, u^2)$ における**接平面**とよび，

$$T_{\mathbf{x}(u^1,u^2)} := \{\alpha_1 \mathbf{x}_1(u^1, u^2) + \alpha_2 \mathbf{x}_2(u^1, u^2) \,|\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}\}$$

と表す．接平面の方程式は，平面上の任意の点を $\mathbf{P}$ とすれば，$\mathbf{P} - \mathbf{x}(u^1, u^2)$ は $\mathbf{x}_1(u^1, u^2)$ と $\mathbf{x}_2(u^1, u^2)$ の 1 次結合で表されるから

$$|\mathbf{P} - \mathbf{x}(u^1, u^2)\ \mathbf{x}_1(u^1, u^2)\ \mathbf{x}_2(u^1, u^2)| = 0 \qquad (\mathbf{P} \in T_{\mathbf{x}(u^1,u^2)})$$

で与えられる．$\mathbf{P} - \mathbf{x}(u^1, u^2)$ を点 $\mathbf{x}(u^1, u^2)$ における接ベクトルという．ベクトル外積を用いて，曲面の単位法線ベクトル $\mathbf{e}$ を

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\|}$$

によって局所的に定める．このとき，$\mathbf{R}^3$ の基底 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{e}\}$ は空間の向きと同調している．

例 3.10 (標準的球面)　$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ のとき，$c > 0$ を定数として $M_c^c(f) := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = c\}$ は球面を定義し，

$$\nabla f(x, y, z) = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

は球面の法線ベクトルである．

定理 3.11　$M_c^c(f) := \{(x, y, z) \in \Omega \,|\, f(x, y, z) = c\}$ が曲面を定義するとせよ．このとき

(i)　点 $\mathbf{x}_0 := (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ における $M_c^c(f)$ の接平面 $T_{\mathbf{x}_0}$ は

$$\langle \mathbf{P} - \mathbf{x}_0, \nabla f(\mathbf{x}_0) \rangle = 0 \qquad (\mathbf{P} \in T_{\mathbf{x}_0})$$

であり，$\mathbf{P} = (P, Q, R)$ とおいて成分で書けば上式は

$$(P - x_0) f_x(\mathbf{x}_0) + (Q - y_0) f_y(\mathbf{x}_0) + (R - z_0) f_z(\mathbf{x}_0) = 0$$

となる．

(ii)　一般性を失わず $f_z(\mathbf{x}_0) \neq 0$ と仮定してよい．このとき (x_0, y_0) の近傍 $U \in \mathbf{R}^2$ と関数 $\varphi : U \to \mathbf{R}$ が一意的に存在して

$$\varphi(x_0, y_0) = z_0, \qquad f(x, y, \varphi(x, y)) = c \qquad ((x, y) \in U).$$

すなわち，$\mathbf{x}_0$ の近傍では $M_c^c(f)$ が φ のグラフ (Monge patch) として表せる．

例 3.12　$f(x, y, z) = xyz$ のとき $c > 0$ を定数として c-等位集合 (level set)

$$M_c^c(f) = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, xyz = c\}$$

はその勾配ベクトルが

$$\nabla f = \begin{pmatrix} yz \\ zx \\ xy \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$$

だから曲面を定義する．

以下の問題は曲面の基本概念を理解するうえで役立つだろう．

問 3.13　曲面上の点 p を通り，p における曲面の単位法線ベクトル $\mathbf{e}$ を含む平面を Π とせよ．Π とこの曲面との交点集合は p の近傍内で曲線となることを示せ．

問 3.14　上述の曲面 $M_c^c(f)$ 上の点 $P=(p,\,q,\,r)$ における接平面 T_P が座標軸と交わる点を $A:=(X,\,0,\,0)$, $B:=(0,\,Y,\,0)$, $C:=(0,\,0,\,Z)$ とおく．4 点 O, A, B, C を頂点とする 4 面体の体積を求めよ．

問 3.15　上述の問題で，三角形 $\triangle(ABC)$ の面積 $S(P)$ を最小とする点 $P=(p,\,q,\,r)$ とその最小値を求めよ．

問 3.16　$f(x,\,y,\,z)=x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}$ かつ $a>0$ を定数とする．

(i)　等位集合 $M_0^0(f)$ で座標軸との交点を除いた部分は曲面であることを証明せよ．

(ii)　$M_0^0(f)$ の点 $P=(x_0,\,y_0,\,z_0)$ での接平面 T_P が座標軸と交わる 3 点を $(X,\,0,\,0)$, $(0,\,Y,\,0)$, $(0,\,0,\,Z)$ とおけば $X^2+Y^2+Z^2=a^2$ が成立することを証明せよ．

(iii)　P が第 1 象限にあるとき，T_P が座標軸と交わる点と原点 O を頂点とする四面体の体積を $V(x_0,\,y_0,z_0)$，3 点 $(X,\,0,\,0)$, $(0,\,Y,\,0)$, $(0,\,0,\,Z)$ を頂点とする三角形の面積を $S(x_0,\,y_0,\,z_0)$ とするとき，S, V を求めよ．

(iv)　S の極値を与える点 P とその極値を求めよ．

(v)　S の極値は極大か極小かを判定せよ．

問 3.17　異なる 2 つの曲面の正則表示を $\mathbf{x}:D\to\mathbf{R}^3$, $\mathbf{y}:E\to\mathbf{R}^3$ とする．これらが 1 点 $P_0\in\mathbf{R}^3$, $P_0=\mathbf{x}(u_0^1,\,u_0^2)=\mathbf{y}(v_0^1,\,v_0^2)$ を共有し，かつ P_0 での単位法線 $\mathbf{n}_1(u_0^1,\,u_0^2)$, $\mathbf{n}_2(v_0^1,\,v_0^2)$ が 1 次独立と仮定する．このとき，$(u_0^1,\,u_0^2)\subset D$ と $(v_0^1,\,v_0^2)\in E$ のまわりの近傍 $\Omega_1\subset D$, $\Omega_2\subset E$ が存在して $\mathbf{x}(\Omega_1)\cap\mathbf{y}(\Omega_2)$ は曲線となることを示せ．

問 3.18　$F(x,\,y,\,z)=0$ および $G(x,\,y,\,z)=0$ が曲面を定義し，これらの曲面の交わりが曲線となるとき，この曲線上の点 $P=(p,\,q,\,r)$ における曲線の接線上の点 $\mathbf{X}=(X,\,Y,\,Z)$ は

$$\frac{X-p}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}}=\frac{Y-q}{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}}=\frac{Z-r}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}}$$

を満たすことを示せ．

問 3.19　a, b, c は定数として，曲面 $f\left(\dfrac{x-a}{z-c}, \dfrac{y-b}{z-c}\right) = 0$ の各点での接平面は定点を通ることを示せ．

問 3.20　a, b は定数として，曲面 $f(x-az, y-bz) = 0$ の接平面は定直線に平行であることを示せ．

第4章　第1基本形式と第2基本形式

曲面上の各点の接平面に $\mathbf{R}^3$ のドット積から正値対称 2 次形式を導入することができる．これを**第 1 基本形式**または **Riemann 計量**という．この正値対称 2 次形式を用いて曲面上の曲線の長さを測ることができ，曲面上の交差する曲線の交角を測り，曲面の面積を測ることができる．このようにして第 1 基本形式は曲面上の図形的な量を測る基本となる．

4.1　第 1 基本形式

$\mathbf{x} : D \to \mathbf{R}^3$ を曲面の正則表示とする．D 内の曲線 $(u(t),\, v(t))\,(a \leq t \leq b)$ によって曲面上の曲線 $c : [a,\, b] \to S$ は $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(u(t),\, v(t))$ と表すことができる．この曲線の速度ベクトルは

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{x}_1 \frac{du}{dt} + \mathbf{x}_2 \frac{dv}{dt}$$

だから，$\mathbf{x}(a)$ から $\mathbf{x}(t)$ までの弧長 $s(t)$ は

$$s(t) = \int_a^t \|\dot{\mathbf{x}}(u)\| du.$$

ここで $u^1 := u,\, u^2 := v,\, \mathbf{x}_i := \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i}\,(i = 1,\, 2)$ とおく．更に

$$E := \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle, \qquad F := \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle, \qquad G := \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 \rangle$$

とおけば弧長は以下のように書ける：

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{E\Big(\frac{du}{dt}\Big)^2 + 2F\frac{du}{dt}\,\frac{dv}{dt} + G\Big(\frac{dv}{dt}\Big)^2}\, dt.$$

$s(t)$ の被積分関数を 2 乗し，dt^2 を乗じて得られる 2 次形式

$$I := ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

を曲面の**第 1 基本形式**という．特にこの曲線の長さ $L(c)$ は

$$L(c) = \int_a^b \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| dt$$

である．

曲線の長さは曲面 S の正則表示のとり方には無関係である．実際，$E = \{(v^1, v^2) \in \mathbf{R}^2\}$ として，$\mathbf{y} : E \to \mathbf{R}^3$ を S の正則表示で $\mathbf{x}(D) \cap \mathbf{y}(E) \supset c[a, b]$ を満たすものとする．座標変換 $\mathbf{y}^{-1}(\mathbf{x}(D) \cap \mathbf{y}(E)) \to \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{x}(D) \cap \mathbf{y}(E))$ を

$$u^i = u^i(v^1, v^2), \qquad (i = 1, 2, \quad (v^1, v^2) \in E, \quad (u^1, u^2) \in D)$$

とすると，$\mathbf{x}(D) \cap \mathbf{y}(E)$ 上では $\mathbf{x}(u^1, u^2) = \mathbf{y}(v^1, v^2)$ だから，Jacobi 行列の成分を

$$A_i^p := \frac{\partial v^p}{\partial u^i}, \qquad B_q^j := \frac{\partial u^j}{\partial v^q}$$

と書けば

$$\mathbf{x}_i = \sum_p \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial v^p} \frac{\partial v^p}{\partial u^i} = \sum_p A_i^p \mathbf{y}_p,$$

$$\mathbf{y}_p = \sum_j \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^j} \frac{\partial u^j}{\partial v^p} = \sum_j B_p^j \mathbf{x}_j.$$

第 1 基本形式はこの座標変換によって $\widetilde{g}_{pq} := \langle \mathbf{y}_p, \mathbf{y}_q \rangle$ とおけば

$$g_{ij} = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = \left\langle \sum_p A_i^p \mathbf{y}_p, \sum_q A_j^q \mathbf{y}_q \right\rangle = \sum_{p,q} A_i^p A_j^q \widetilde{g}_{pq},$$

$$du^i = \sum_p B_p^i dv^p.$$

従って第 1 基本形式は

$$\begin{aligned} \sum_{ij} g_{ij} du^i du^j &= \sum_{ij} \sum_{pqrs} A_i^p A_j^q \widetilde{g}_{pq} (B_r^i dv^r)(B_s^j dv^s) \\ &= \sum_{pqrs} \widetilde{g}_{pq} \delta_r^p \delta_s^q dv^r dv^s \\ &= \sum_{pq} \widetilde{g}_{pq} dv^p dv^q \end{aligned}$$

より，座標変換に無関係であることが解る．特に

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{\sum_{ij} g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}}\, dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{pq} \widetilde{g}_{pq} \frac{dv^p}{dt} \frac{dv^q}{dt}}\, dt$$

だから曲線 c の長さは正則表示に無関係である．以上の議論をまとめて：

定理 4.1　第 1 基本形式は座標変換に関して不変な量である．

第 1 基本形式 I は $u = u^1,\ v = u^2$ とおいて

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} du^i du^j, \qquad g_{ij} := \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle \qquad (i,\ j = 1,\ 2)$$

と表せば計算上便利である．曲面の定義から実対称行列 (g_{ij}) は正定値であり，従って逆行列が存在する．

定義 4.2　曲面 $\mathbf{x} : D \to \mathbf{R}^3$ の**面積素** dS を

$$dS := \|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\| du^1 du^2 = \sqrt{\det(g_{ij})}\, du^1 du^2$$

で定義する．このとき $S = \mathbf{x}(D)$ の面積は

$$\iint_D \|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\| du^1 du^2 = \iint_S dS$$

で与えられる．

例 4.3　例 3.2 で与えたグラフの曲面について第 1 基本形式の成分は

$$g_{ij} = \langle \mathbf{x}_i,\ \mathbf{x}_j \rangle = \delta_{ij} + f_i f_j$$

であり，面積素は

$$dS = \sqrt{1 + f_1^2 + f_2^2}\, du^1 du^2$$

である．

例 4.4 (回転面)　滑らかな正値関数 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を母線 (profile curve) とする x 軸のまわりの回転面の正則表示を $\mathbf{x} : \mathbf{R} \times (0,\ 2\pi) \to \mathbf{R}^3$ とおけば

$$\mathbf{x}(u,\ v) = \begin{pmatrix} u \\ f(u) \cos v \\ f(u) \sin v \end{pmatrix} \qquad (u \in \mathbf{R},\ v \in (0,\ 2\pi))$$

で与えられる．このとき

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ f' \cos v \\ f' \sin v \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -f \sin v \\ f \cos v \end{pmatrix}.$$

更に，単位法線ベクトル場 $\mathbf{e}$ は例 1.13 を用いて

$$\mathbf{e} = \frac{1}{1+(f')^2} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & 1 & 0 \\ \mathbf{e}_2 & f' \cos v & -\sin v \\ \mathbf{e}_3 & f' \sin v & \cos v \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{1+(f')^2} \begin{pmatrix} f' \\ -\cos v \\ -\sin v \end{pmatrix}$$

だから

$$E = g_{11} = 1 + (f')^2, \qquad F = g_{12} = 0, \qquad G = g_{22} = f^2.$$

従って

$$ds^2 = (1 + (f')^2) du^1 du^1 + f^2 du^2 du^2, \qquad dS = f\sqrt{1+(f')^2}\, du^1 du^2.$$

問 4.5 (回転トーラス)　$a > b > 0$ を定数として回転トーラス $T^2(a, b)$ の正則表示 $\mathbf{x} : (-\pi, \pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbf{R}^3$ を

$$\mathbf{x}(u, v) := \begin{pmatrix} (a + b\cos u) \cos v \\ (a + b\cos u) \sin v \\ b \sin u \end{pmatrix} \qquad ((u, v) \in (-\pi, \pi) \times (0, 2\pi)) \quad (4.1.1)$$

とする．この曲面の第 1 基本形式，単位法線ベクトル場および面積素を求めよ．

[Figure 4.1]

問 4.6 (楕円面)　$c > b > a > 0$ を定数として，$\mathbf{R}^3$ 内の楕円面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

の正則表示を求め，更に第 1 基本形式と単位法線ベクトル場 $\mathbf{e}$ を求めよ．

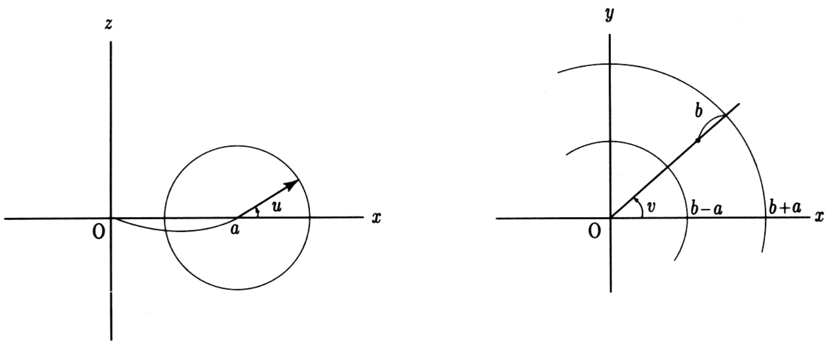


Figure 4.1　回転トーラスの概形

4.2　第2基本形式

曲面 S 上の点 $\mathbf{x}(u, v)$ における接平面から曲面がどの程度離れているかを調べるために，点 $\mathbf{x}(u+\Delta u, v+\Delta v)$ から接平面へ下ろした垂線の長さを a としよう．このとき

$$\begin{aligned} a &= \langle(\mathbf{x}(u+\Delta u, v+\Delta v) - \mathbf{x}(u, v)), \mathbf{e}(u, v)\rangle \\ &= \langle(\Delta u\mathbf{x}_u + \Delta v\mathbf{x}_v), \mathbf{e}\rangle \\ &\quad + \left\langle \frac{1}{2}((\Delta u)^2\mathbf{x}_{uu} + 2\Delta u\Delta v\mathbf{x}_{uv} + (\Delta v)^2\mathbf{x}_{vv}), \mathbf{e}\right\rangle + [3]. \end{aligned}$$

ここで [3] は 3 次以上の無限小である．

$$h_{11} = L = \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{e}\rangle, \qquad h_{12} = M = \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{e}\rangle, \qquad h_{22} = N = \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{e}\rangle$$

とおけば，a の主要部は

$$a = \frac{1}{2}((\Delta u)^2L + 2\Delta u\Delta vM + (\Delta v)^2N)$$

となる．もしも $L = M = N = 0$ ならば，a の主要部は

$$\begin{aligned} a &= \left\langle \frac{1}{6}((\Delta u)^3\mathbf{x}_{uuu} + 3(\Delta u)^2\Delta v\mathbf{x}_{uuv} \right. \\ &\qquad\qquad \left. + 3\Delta u(\Delta v)^2\mathbf{x}_{uvv} + (\Delta v)^3\mathbf{x}_{vvv}), \mathbf{e}\right\rangle \\ &=: \frac{1}{6}(A(\Delta u)^3 + B(\Delta u)^2\Delta v + C\Delta u(\Delta v)^2 + D(\Delta v)^3). \end{aligned}$$

ここでもしも 3 次方程式

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 = 0$$

が 3 実根をもてば，接平面 $T_{\mathbf{x}(u,v)}$ は曲面と 3 本の曲線で交わり，曲面を 6 部分に分ける [Figure 4.2].

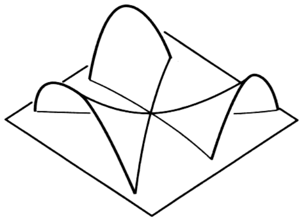


Figure 4.2　Monkey saddle

更に，L, M, N を書き直せば

$$L = \frac{|\mathbf{x}_{uu}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v|}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}, \qquad M = \frac{|\mathbf{x}_{uv}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v|}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}, \qquad N = \frac{|\mathbf{x}_{vv}\mathbf{x}_u\mathbf{x}_v|}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}.$$

定義 4.7　$u = u^1,\ v = u^2$ とおいて 2 次形式

$$II := \sum_{i,j=1}^{2} h_{ij} du^i du^j = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

を曲面 S の**第 2 基本形式**という．ここで

$$h_{ij} := \langle \mathbf{x}_{ij},\ \mathbf{e} \rangle = \frac{|\mathbf{x}_{ij}\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|}{\|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\|} \qquad (i,\ j = 1,\ 2).$$

上の定義からただちに以下の式を得る．

$$h_{ij} = -\langle \mathbf{x}_i,\ \mathbf{e}_j \rangle \qquad (i,\ j = 1,\ 2).$$

例 4.8　グラフ曲面の第 2 基本形式を求めてみよう．グラフ曲面の正則表示は以下で与える．

$$\mathbf{x}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ f(u^1, u^2) \end{pmatrix},$$

$$f_i := \frac{\partial f}{\partial u^i}, \qquad f_{ij} := \frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^i}$$

とおく．

$$\mathbf{x}_1 := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_2 := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}_{ij} := \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^j \partial u^i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{ij} \end{pmatrix}.$$

ここで $\Delta := \sqrt{\det(g_{ij})} = \sqrt{1 + f_1^2 + f_2^2}$ とおけば，単位法線ベクトル場 $\mathbf{e}$ は

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -f_1 \\ -f_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

従って

$$h_{ij} = \langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{e} \rangle = \frac{1}{\Delta} f_{ij}$$

を得る．

命題 4.9 第 2 基本形式は座標系の選び方によらない．

証明 $\mathbf{x} : D \to \mathbf{R}^3$, $D = \{(u^1, u^2) \in \mathbf{R}^2\}$ と $\mathbf{y} : E \to \mathbf{R}^3$, $E = \{(v^1, v^2) \in \mathbf{R}^2\}$ は $\mathbf{x}(D) \cap \mathbf{y}(E) \neq \emptyset$ を満たす局所座標系とし，座標変換

$$\mathbf{y}^{-1}(\mathbf{x}(D) \cap \mathbf{y}(E)) \longrightarrow \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{x}(D) \cap \mathbf{y}(E))$$

を

$$u^i = u^i(v^1, v^2) \qquad (i = 1, 2, \quad (v^1, v^2) \in E, \quad (u^1, u^2) \in D)$$

と表すと，$\mathbf{x}(D) \cap \mathbf{y}(E)$ 上では $\mathbf{x}(u^1, u^2) = \mathbf{y}(v^1, v^2)$ だから，Jacobi 行列の成分を

$$A_i^p := \frac{\partial v^p}{\partial u^i}, \qquad B_q^j := \frac{\partial u^j}{\partial v^q}$$

とする．このとき

$$\mathbf{x}_i = \sum_p \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial v^p} \frac{\partial v^p}{\partial u^i} = \sum_p A_i^p \mathbf{y}_p,$$

$$\mathbf{y}_p = \sum_j \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^j} \frac{\partial u^j}{\partial v^p} = \sum_j B_p^j \mathbf{x}_j$$

および

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial u^i} = \sum_p \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial v^p} \frac{\partial v^p}{\partial u^i} = \sum_p A_i^p \mathbf{e}_p, \qquad \mathbf{e}_p := \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial v^p},$$

$$h_{pq}^* := \langle \mathbf{y}_{pq}, \mathbf{e} \rangle = -\langle \mathbf{y}_p, \mathbf{e}_q \rangle, \qquad h_{ij} = \langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{e} \rangle = -\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{e}_j \rangle,$$

$$du^i = \sum_p B_p^i dv^p, \qquad dv^p = \sum_i A_i^p du^i.$$

従って

$$h_{ij} = -\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{e}_j \rangle = -\sum_{pq} \langle \mathbf{y}_p A_i^p, \mathbf{e}_q A_j^q \rangle = \sum_{pq} h_{pq}^* A_i^p A_j^q.$$

これより

$$h_{ij} du^i du^j = \sum_{pq} h_{pq}^* \Bigl(\sum_i A_i^p du^i\Bigr)\Bigl(\sum_j A_j^q du^j\Bigr) = h_{pq}^* dv^p dv^q.$$

■

注意 4.10　C^r-級関数 $f : D \to \mathbf{R}$ の点 $\mathbf{u} := (u_1, u_2, 0) \in D$ における Taylor 展開は，$\mathbf{h} := (h_1, h_2, 0)$ を十分に小さい任意のベクトルとして，

$$\begin{aligned} & f(u_1 + h_1, u_2 + h_2) \\ &\quad = f(u_1, u_2) + h_1 f_1 + h_2 f_2 + \frac{1}{2}(h_1^2 f_{uu} + 2h_1 h_2 f_{uv} + h_2^2 f_{vv}) + [3]. \end{aligned}$$

ここに $f_i := \dfrac{\partial f}{\partial u_i}$ で，$D \subset \mathbf{R}^2$ は $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ が張る平面内の領域である．この式をベクトル値関数として書き直してみよう．

$$\mathbf{x}(\mathbf{u}) := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ f(u_1, u_2) \end{pmatrix} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + f(u_1, u_2)\mathbf{e}_3$$

とおけば，曲面上の 2 点を $P := \mathbf{x}(\mathbf{u}), Q := \mathbf{x}(\mathbf{u} + \mathbf{h})$ として

$$\begin{aligned} Q - P = \mathbf{x}(\mathbf{u} + \mathbf{h}) - \mathbf{x}(\mathbf{u}) &= \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ f(\mathbf{u} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{u}) \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{h} + \Bigl\{h_1 f_1 + h_2 f_2 + \frac{1}{2}(h_1^2 f_{uu} + 2h_1 h_2 f_{uv} + h_2^2 f_{vv})\Bigr\}\mathbf{e}_3 + [3]. \end{aligned}$$

点 $\mathbf{x}(\mathbf{u})$ を通り $\mathbf{h}, \mathbf{e}_3$ で張られる平面 $\Pi_P(\mathbf{h}, \mathbf{e}_3)$ でこの曲面を切ると，切り口の曲線 $t \mapsto \mathbf{x}(t) := \mathbf{x}(\mathbf{u} + t\mathbf{h})$ は

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} u_1 + th_1 \\ u_2 + th_2 \\ f(\mathbf{u} + t\mathbf{h}) \end{pmatrix} = \mathbf{u} + t\mathbf{h} + f(\mathbf{u} + t\mathbf{h})\mathbf{e}_3.$$

この曲線の $t = 0$ における接線の傾きは

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{u} + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{u})}{\|t\mathbf{h}\|}$$
$$= \left\langle \nabla f(\mathbf{u}),\ \frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} \right\rangle = \frac{h_1 f_1 + h_2 f_2}{\|\mathbf{h}\|}. \tag{4.2.1}$$

故に点 $\mathbf{x}(\mathbf{u})$ におけるこの曲面の接平面 $T_{\mathbf{x}(\mathbf{u})}$ と平面 $\Pi_P(\mathbf{h},\ \mathbf{e}_3)$ の交線の傾きが $\left\langle \nabla f(\mathbf{u}), \frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} \right\rangle$ である．これはいうまでもなく関数 $f(\mathbf{u} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{u})$ の $\mathbf{h}$ に関する 1 次近似である．

次に

$$\mathbf{x}(\mathbf{u} + \mathbf{h}) - \mathbf{x}(\mathbf{u}) - \langle \nabla f(\mathbf{u}),\ \mathbf{h} \rangle \mathbf{e}_3 = \frac{1}{2} II(h_1,\ h_2)\mathbf{e}_3 + [3]$$

と第 2 基本形式との関係を考えよう．$\mathbf{x}_i := \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}$ とおくと，単位法線ベクトル $\mathbf{e}$ は

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -f_1 \\ -f_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \Delta := \sqrt{1 + f_1^2 + f_2^2} = \|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\|.$$

ここに第 2 基本形式は

$$h_{ij} = \frac{1}{\Delta} f_{ij}$$

となる．更にグラフの高さの方向 $\mathbf{e}_3$ と法線方向の方向余弦の値

$$\langle \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e} \rangle = \frac{1}{\Delta}$$

に注意すれば

$$II(h_1,\ h_2) = \frac{1}{\Delta} \Bigl(\sum_{i,j} f_{ij} h_i h_j \Bigr) \tag{4.2.2}$$

が解るだろう．すなわち第 2 基本形式 $\sum_{i,j} h_{ij} h_i h_j$ の図形的意味は $\mathbf{x}(\mathbf{u} + \mathbf{h}) - \mathbf{x}(\mathbf{u}) - \langle \nabla f(\mathbf{u}),\ \mathbf{h} \rangle \mathbf{e}_3$ の単位法線 $\mathbf{e}(\mathbf{u})$ への射影に他ならない．関数のグラフで与えられた曲面の第 2 基本量は，関数の 2 次近似を曲面の単位法線方向に射影した量である．

定義 4.11　曲面上の点 $p = \mathbf{x}(u^1, u^2)$ において，第2基本形式 $h_{ij}(u^1, u^2)$ が

(i)　$\mathrm{rank}(h_{ij}) = 0$ のとき，p を**平坦点** (planner point) という．

(ii)　$h_{ij} = \kappa\delta_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \kappa \neq 0)$ のとき，p を**臍点** (umbilic point) という．

問 4.12　(1)　問 4.5 の回転トーラス上の第2基本形式と平坦点を求めよ．

(2)　回転放物面 ($k > 0$ は定数)

$$x(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \frac{k}{2}(u^2 + v^2) \end{pmatrix} \qquad ((u, v) \in \mathbf{R}^2)$$

の臍点を求めよ．

4.3　曲面上の曲線と法曲率

$\mathbf{x} : D \to \mathbf{R}^3$ を曲面の正則表示として，D 内の曲線 $t \mapsto (u^1(t), u^2(t))$ の $\mathbf{x}$ による像 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(u^1(t), u^2(t))$ によって曲面上の曲線を表す．この速度ベクトルは

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^{2} \mathbf{x}_i \frac{du^i}{dt} = \sum_{i=1}^{2} \dot{u}^i \mathbf{x}_i$$

と書け，点 $\mathbf{x}(t)$ における接平面上にある．$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{e}$ は $\mathbf{R}^3$ の基底だから，$\mathbf{x}_{ij}$ をこれらの1次結合で表して以下のように書ける．

$$\mathbf{x}_{ij} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \mathbf{x}_k + h_{ij}\mathbf{e}.$$

曲率ベクトルを求めるため弧長 $s = s(t)$ を用いて $\mathbf{x}'(t(s)), \mathbf{x}''(t(s))$ を計算すると，

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \sum \ddot{u}^i \mathbf{x}_i + \sum_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j \Big(\sum_k \Gamma_{ij}^k \mathbf{x}_k + h_{ij}\mathbf{e}\Big),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}''(t(s)) &= \frac{d}{ds}\Big(\sum \mathbf{x}_i \dot{u}^i \frac{dt}{ds}\Big) \\ &= \sum_i \Big(\sum_j \mathbf{x}_{ij} \dot{u}^j \dot{u}^i \Big(\frac{dt}{ds}\Big)^2 + \mathbf{x}_i \Big(\frac{dt}{ds}\Big)^2 \ddot{u}^i + \mathbf{x}_i \dot{u}^i \frac{d^2 t}{ds^2}\Big) \end{aligned}$$

$$= \sum_i \Big(\sum_{jk} \Gamma^i_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k \Big(\frac{dt}{ds}\Big)^2 + \ddot{u}^i \Big(\frac{dt}{ds}\Big)^2 + \dot{u}^i \frac{d^2 t}{ds^2} \Big) \mathbf{x}_i$$

$$+ \sum_{jk} h_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k \Big(\frac{dt}{ds}\Big)^2 \mathbf{e}.$$

話を単純化するため弧長 s を用いて $\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(t(s))$ の曲率ベクトルを求めると，

$$\mathbf{x}''(s) = \frac{d}{ds}\Big(\sum \frac{du^i}{ds} \mathbf{x}_i \Big)$$

$$= \sum_i \Big(\frac{d^2 u^i}{ds^2} + \sum_{jk} \Gamma^i_{jk} \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} \Big) \mathbf{x}_i + \sum_{jk} h_{jk} \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} \mathbf{e}$$

となる．

定義 4.13 (法曲率と測地曲率)　曲面上の曲線 $\mathbf{x}(s)$ の曲率ベクトルを

$$\mathbf{x}''(s) := \mathbf{k}_g + \mathbf{k}_n \qquad (\mathbf{k}_g \in T_{\mathbf{x}(s)},\ \mathbf{k}_n \perp T_{\mathbf{x}(s)})$$

と直交分解したとき，$\kappa_n := \|\mathbf{k}_n\|$ を**法曲率**という．$\kappa_g := \|\mathbf{k}_g\|$ を**測地曲率**という．

補題 4.14　曲面上の曲線の法曲率は曲線の速度ベクトルの方向のみによって決まる．すなわち，κ_n は点 $\mathbf{x}(s)$ における単位円周上の 2 次同次関数となる．

証明　曲線の弧長を s とすると

$$ds^2 = \sum g_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k dt^2$$

だから

$$\kappa_n = \sum h_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k \Big(\frac{dt}{ds}\Big)^2 = \frac{\sum h_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k}{\sum g_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k}.$$

定理 4.1 と命題 4.9 から第 1 基本形式と第 2 基本形式は曲面の正則表示のとり方によらずに決まる．従って κ_n の右辺の分母子は正則表示のとり方に無関係で，ベクトル $\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum \dot{u}^i \mathbf{x}_i$ の方向のみによって決まる．　■

曲面上の曲線 $\mathbf{x}(s)$ の曲率 κ は $\kappa \neq 0$ とせよ．点 $p = \mathbf{x}(0)$ における曲面の法線ベクトルと $\mathbf{x}'(0)$ によって張られる平面を Π とする．この曲面と Π との交線を $\overline{\mathbf{x}}(s)\,(-\varepsilon < s < \varepsilon)$, $\overline{\mathbf{x}}(0) = p$, $\overline{\mathbf{x}'}(0) = \mathbf{x}'(0)$ とする (問題 3.13 を参照)．平面曲線 $\overline{\mathbf{x}}(s)$ の曲率ベクトルを $\overline{\mathbf{R}}(s)$，曲率を $\overline{\kappa}(s)$ とし，p における曲面の単位

法線ベクトル $\mathbf{e}(0)$ は $\overline{\mathbf{R}}(0) = \overline{\kappa}(0) \cdot \mathbf{e}(0)$, $\overline{\kappa}(0) > 0$ を満たすように定める．補題 4.14 によって法曲率は接ベクトルの方向のみに依存して決まるから

$$\kappa_n(\mathbf{x}'(0)) = \langle \overline{\mathbf{R}}_n(0), \mathbf{e}(0) \rangle = \overline{\kappa}(0).$$

他方, $\mathbf{x}'' = \mathbf{R}_n + \mathbf{R}_g$ だから, $\mathbf{x}''$ と $\mathbf{e}$ とのなす角を α とおくと $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ で，$\mathbf{R}_n(0) = \langle \mathbf{x}''(0), \mathbf{e}(0) \rangle \, \mathbf{e}(0)$ だから

$$\kappa_n(\mathbf{x}'(0)) = \langle \mathbf{R}_n(0), \mathbf{e} \rangle = \kappa \cos \alpha.$$

よって Meusnier の定理が証明された.

定理 4. 15 (Meusnier の定理)　曲面 S 上の点 p を通る曲線

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(u^1(s), u^2(s)), \qquad \mathbf{x}(0) = p$$

の曲率 $\kappa(0)$ は $\kappa(0) \neq 0$ とする．このとき，$\mathbf{x}'(0)$ の定める法曲率 $\kappa_n(\mathbf{x}'(0))$ は

$$\kappa_n(\mathbf{x}'(0)) = \kappa(0) \cdot \cos \alpha$$

を満たす.

例 4. 16　Meusnier の定理を球面上で考えてみよう．半径 $r > 0$ の球面 $\mathbf{S}^2(r) \subset \mathbf{R}^3$ の 1 点 p を通る小円 $\mathbf{x}(s)$ が平面 Π に含まれているとする．Π と p における内向き法線 $\mathbf{e}(p)$ とのなす角を θ とおけば，小円の半径は $r \cos \theta$ である．他方，単位法線ベクトル $\mathbf{e}(p)$ と $\mathbf{x}''(s)$ とのなす角は θ だから

$$\kappa_n = \langle \mathbf{x}'', \mathbf{e} \rangle = \frac{1}{r \cos \theta} \cdot \cos \theta = \frac{1}{r}.$$

すなわち，p を通るどの平面で切っても切り口の小円の曲率ベクトルの $\mathbf{e}$ への射影は常に一定の長さとなる [Figure4.3].

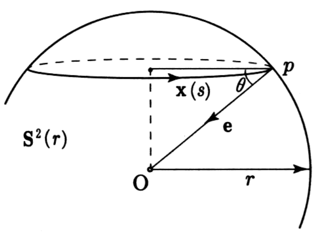


Figure 4.3　Meusnier の定理

曲面上の1点 $p=\mathbf{x}(t)$ を任意に固定して，p における接ベクトルを変化させたときの法曲率の最大最小を求めよう．$\xi=\sum\xi^i\mathbf{x}_i\neq 0$ として ξ に関する法曲率 $\kappa_n(\xi)$ は

$$\kappa_n(\xi)=\frac{\sum h_{jk}\xi^j\xi^k}{\sum g_{jk}\xi^j\xi^k}.$$

分母を払って ξ^i を変数とみなして微分すると

$$\sum_j(h_{ij}\xi^j-\kappa_n(\xi)g_{ij}\xi^j)-\sum_{jk}\frac{\partial\kappa_n(\xi)}{\partial\xi^i}g_{jk}\xi^j\xi^k=0.$$

もしも $\kappa_n(\xi)$ が極値であれば $\dfrac{\partial\kappa_n(\xi)}{\partial\xi^i}=0$ だから，この ξ に対して

$$\sum_j(h_{ij}-\kappa_n(\xi)g_{ij})\xi^j=0\qquad(i=1,\,2).$$

故に上式から

$$\begin{pmatrix}h_{11}-\kappa_n(\xi)g_{11} & h_{12}-\kappa_n(\xi)g_{12}\\ h_{21}-\kappa_n(\xi)g_{21} & h_{22}-\kappa_n(\xi)g_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^1\\ \xi^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

を得る．従って $\xi\neq\mathbf{0}$ よりこの行列の階数は2でないから

$$\det\begin{pmatrix}h_{11}-\kappa_n(\xi)g_{11} & h_{12}-\kappa_n(\xi)g_{12}\\ h_{21}-\kappa_n(\xi)g_{21} & h_{22}-\kappa_n(\xi)g_{22}\end{pmatrix}=0.$$

これを $\kappa_n(\xi)$ について解けば

$$\det(g_{ij})\kappa_n(\xi)^2-(g_{11}h_{22}+g_{22}h_{11}-2g_{12}h_{21})\kappa_n(\xi)+\det(h_{ij})=0.$$

この2解を $\kappa_1,\,\kappa_2$ とおけば，解と係数の関係から

$$2H=\kappa_1+\kappa_2=\frac{h_{11}g_{22}-2h_{12}g_{21}+h_{22}g_{11}}{\det(g_{ij})}=\sum_{ij}g^{ij}h_{ij},\tag{4.3.1}$$

$$K=\kappa_1\kappa_2=\frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})}.\tag{4.3.2}$$

ここに，(g^{ij}) は (g_{ij}) の逆行列である．

定義 4.17 (主曲率方向と漸近方向・Gauss 曲率と平均曲率)

(i)　法曲率の極値 $\kappa_1,\,\kappa_2$ を**主曲率**という．主曲率を与える方向を**主曲率方向**という．速度ベクトルがつねに主曲率方向に接する曲線を**主曲率線**という．

(ii)　法曲率が 0 となる方向を**漸近方向**という．速度ベクトルがつねに漸近方向に接する曲線を**漸近線**という．

(iii)　$K := \kappa_1 \kappa_2$ を **Gauss 曲率**，$H := \dfrac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$ を**平均曲率**という．

曲面上の点 $p \in S$ を固定する．p を通り単位法線ベクトル $\mathbf{e}(p)$ と任意の単位接ベクトル $v \in T_pS$ で定まる平面を $\Pi(p, v) \subset \mathbf{R}^3$ とおく．このとき $\Pi(p, v) \cap S$ は p の近傍 $U_p \subset S$ 内で滑らかな曲線となる．この曲線を弧長 s をパラメータとして $c_v(s)\,(s \in (-\varepsilon, \varepsilon))$ とする．すなわち，$c_v(0) = p$, $\dot{c}_v(0) = v$ である．この曲線の曲率ベクトル $c_v''(0)$ は $\mathbf{e}(p)$ と平行で $\kappa_n(v) = \pm\|c_v''(0)\|$ となる．この平面曲線の形は局所座標系のとり方に無関係に決まるから，$\kappa_n(v)$ は p のまわりの局所座標系の選び方に依存しない．特に，単位円周上の関数としての $v \mapsto \kappa_n(v)$ の極値は座標系の選び方には依存しない曲面固有の値であることが解る．Gauss 曲率，平均曲率も座標系の選び方に依存しないことが解る．この事実は補題 4.14 からも解るが，念のため直観的考察を計算によって検証しよう．

命題 4.18　曲面の主曲率，平均曲率および Gauss 曲率は曲面固有の量であって，曲面の正則表示のとり方に無関係に決まる．

証明　曲面上の点 P のまわりの 2 つの座標近傍を $\mathbf{x} : D \to \mathbf{R}^3$, $\mathbf{y} : E \to \mathbf{R}^3$ とする．P における任意の接ベクトル $\xi \neq \mathbf{0}$ は

$$\xi = \sum_{i=1}^{2} \xi^i \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^{2} \widetilde{\xi}^a \mathbf{y}_a$$

と書ける．座標変換 $\mathbf{y}^{-1}(\mathbf{x}(D) \cap \mathbf{y}(E)) \to \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{x}(D) \cap \mathbf{y}(E))$ を

$$u^i = u^i(v^1, v^2) \qquad (i = 1, 2, \quad (v^1, v^2) \in E, \quad (u^1, u^2) \in D)$$

とする．Jacobi 行列の成分を

$$A_i^p := \frac{\partial v^p}{\partial u^i}, \qquad B_q^j := \frac{\partial u^j}{\partial v^q}$$

とおいて，第 1，第 2 基本形式の成分を $(\mathbf{y}, E)$ に関して

$$\widetilde{g}_{ab} = \langle \mathbf{y}_a, \mathbf{y}_b \rangle, \qquad \widetilde{h}_{ab} = -\langle \mathbf{y}_a, \mathbf{e}_b \rangle \qquad (a, b = 1, 2)$$

と書くと，ξ が定める法曲率 $\kappa_n(\xi)$, $\widetilde{\kappa}_n(\xi)$ は

$$\kappa_n(\xi) = \frac{\displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} h_{ij}\,\xi^i\xi^j}{\displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\,\xi^i\xi^j} = \frac{\sum \widetilde{h}_{ab}\,A_i^a A_j^b\,\widetilde{\xi}^c B_c^i\,\widetilde{\xi}^d B_d^j}{\sum \widetilde{g}_{ab}\,A_i^a A_j^b\,\widetilde{\xi}^c B_c^i\,\widetilde{\xi}^d B_d^j}$$

$$= \frac{\displaystyle\sum_{c,d=1}^{2} \widetilde{h}_{cd}\,\widetilde{\xi}^c\widetilde{\xi}^d}{\displaystyle\sum_{c,d=1}^{2} \widetilde{g}_{cd}\,\widetilde{\xi}^c\widetilde{\xi}^d} = \widetilde{\kappa}_n(\xi).$$

故に法曲率は正則表示のとり方に無関係である．従ってその最大，最小値で定義された平均曲率と Gauss 曲率も曲面の正則表示に無関係に決まる． ∎

問 4.19 曲面 S 上の点 p を通り単位法線ベクトル $\mathbf{e}(p)$ と任意の単位接ベクトル $v \in T_pS$ で定まる平面を $\Pi(p, v) \subset \mathbf{R}^3$ とおく．このとき $\Pi(p, v) \cap S$ は p のある近傍 $U_p \subset S$ 内で滑らかな曲線となることを示せ．

主曲率方向と主曲率線，漸近方向と漸近線の性質を調べる．まずは線形代数の復習から始めよう．$A = (a_{ij})$ を実対称 $n \times n$ 行列とする．$\lambda \neq 0$ に対して

$$AX = \lambda X$$

を満たすベクトル $X \in \mathbf{R}^n$ を A の**固有ベクトル**，λ を A の**固有値**という．

$$V_\lambda := \{X \in \mathbf{R}^n \mid AX = \lambda X\}$$

は $\mathbf{R}^n$ の線形部分空間である．V_λ を固有値 λ に対する**固有空間**という．

問 4.20

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \qquad (a,\, b,\, c \in \mathbf{R})$$

の固有値と固有ベクトルを求め，A を対角化せよ．

問 4.21 A の異なる固有値に対する固有ベクトルは直交することを証明せよ．

命題 4.22 $A = (a_{ij})$ を実対称 $n \times n$ 行列とする．このとき

(i) 異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する．

(ii) $f : \mathbf{S}^{n-1} \to \mathbf{R}$ を $f(X) := X^tAX = \langle AX, X\rangle\,(X \in \mathbf{S}^{n-1})$ とおけば，X が A の固有ベクトルであるための必要十分条件は X が f の臨界点であ

ることである．

証明　球面上の点 $X \in \mathbf{S}^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$ における任意の接ベクトルを $Y \in T_X\mathbf{S}^{n-1}$ とし，Y に接する球面上の曲線を $c(t)$ とする．すなわち，$c(0) = X$, $\dot{c}(0) = Y$ である．このとき $f(t) := f(c(t))$ とおけば

$$f(t) := \langle Ac(t), c(t)\rangle \qquad (t \in (-\varepsilon, \varepsilon)).$$

従って $f'(0) = 2\langle AX, Y\rangle$ を得る．ここで X が A の固有ベクトルならば $\langle AX, Y\rangle = 0\,(\forall Y \in T_X\mathbf{S}^{n-1})$ となって，X が f の臨界点となる．逆は明らか．∎

4.4　主曲率と曲率線

κ_1, κ_2 を曲面 S の点 $\mathbf{x}(u^1, u^2)$ における主曲率とする．このとき κ_1, κ_2 は

$$\kappa^2 - 2H\kappa + K = 0$$

の 2 実根である．H, K ともに滑らかな関数であることに注意して，

$$\kappa_1, \kappa_2 = H \pm \sqrt{H^2 - K}.$$

主曲率は臍点でない点 (non-umbilic points) では滑らかな関数である．臍点 (umbilic point) では主曲率は連続であるが，必ずしも微分可能でない．

4.4.1　Rodrigues の公式

曲率線の図形的性質は以下に述べる Rodrigues の公式で説明される．更に，曲率線が座標曲線となる局所座標系がとれることを示そう．この座標系は曲面上の計算にさいして有効である．

命題 4.23　主曲率方向に沿って単位法線ベクトル場を微分すると主曲率ベクトルに従属する．逆も真である．

証明　曲線上の点 $\mathbf{x}(t)$ における接ベクトル $\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum \dfrac{du^i}{dt}\mathbf{x}_i$ が主曲率ベクトルであるための必要十分条件は

$$\sum_i \left(h_{ij}\frac{du^i}{dt} - \kappa g_{ij}\frac{du^i}{dt}\right) = 0 \qquad (\forall j = 1, 2).$$

これを書き直して

$$-\sum_i(\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{x}_j\rangle + \kappa\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j\rangle)\frac{du^i}{dt} = 0 \qquad (\forall j = 1,\, 2).$$

一方，

$$\frac{d}{dt}\mathbf{e}(\mathbf{x}(t)) = \sum_i \mathbf{e}_i\frac{du^i}{dt}, \qquad \frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \sum_i \mathbf{x}_i\frac{du^i}{dt}$$

だから，上式は

$$\left\langle \mathbf{x}_j,\, \left(\frac{d}{dt}\mathbf{e}(\mathbf{x}(t)) + \kappa\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t)\right)\right\rangle = 0 \qquad (\forall j = 1,\, 2).$$

故に以下の Rodrigues の公式を得る：

$$\frac{d}{dt}\mathbf{e}(\mathbf{x}(t)) + \kappa\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}. \tag{4.4.1}$$

逆の証明はこの計算を逆にたどればよい． ∎

座標曲線が主曲率線のときは Rodrigues の公式から $\mathbf{e}_1 + \kappa_1\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ だから，$h_{12} = -\langle \mathbf{e}_1,\, \mathbf{x}_2\rangle = 0$ となる．逆に，

$$g_{12} = h_{12} = 0$$

を満たす $(u^1,\, u^2) \in D$ の座標曲線は曲率線である．実際，接ベクトル $\xi = \sum \xi^i\mathbf{x}_i$ に対する法曲率 $\lambda(\xi)$ は

$$\lambda(\xi) = \frac{h_{11}(\xi^1)^2 + h_{22}(\xi^2)^2}{g_{11}(\xi^1)^2 + g_{22}(\xi^2)^2}$$

であり，この極値は $\xi^i = 0\,(i = 1,\, 2)$ で実現される．

命題 4.24 曲面 $\mathcal{S}$ 上の臍点でない点の近傍で 2 つの主曲率方向は直交し，かつ滑らかなベクトル場を定義する．

証明 $p_0 \in \mathcal{S}$ を臍点でない点とし，$\mathbf{x} : D \to \mathbf{R}^3$ を $\mathcal{S}$ の正則表示で $p_0 = \mathbf{x}(u_0^1,\, u_0^2)$ とする．$(u_0^1,\, u_0^2) \in U \subset D$ は臍点を含まない p_0 の近傍とすると，主曲率は $\mathbf{x}(U)$ 上で滑らかである．$\xi_0 := \sum \xi_0^i\,\mathbf{x}_i(u_0^1,\, u_0^2)$ が主曲率 κ に対する主曲率ベクトルとする．このとき，$\mathbf{x}(U)$ 上の滑らかなベクトル場

$$\xi(u^1,\, u^2) := \sum_i \xi^i(u^1,\, u^2)\,\mathbf{x}_i(u^1,\, u^2) \qquad ((u^1,\, u^2) \in U)$$

が $\mathbf{x}(U)$ の各点で κ に対する主曲率ベクトルとなるように構成しよう．p_0 で以下が成立する：

$$\sum_{j=1}^{2}(h_{ij}-\kappa g_{ij})\xi_0^j=0 \qquad (i=1,\,2), \tag{4.4.2}$$

$$(h_{11}-\kappa g_{11})^2+(h_{12}-\kappa g_{12})^2+(h_{22}-\kappa g_{22})^2\neq 0.$$

一般性を失うことなく点 p_0 で $\xi_0^2=1$ と (従って p_0 の近傍 $\mathbf{x}(U)$ 内で) $h_{11}-\kappa g_{11}\neq 0$ と仮定してよい．このとき関数 $\xi^i : U\to\mathbf{R}\,(i=(1,\,2))$ を

$$\xi^1=-\frac{h_{12}-\kappa g_{12}}{h_{11}-\kappa g_{11}}, \qquad \xi^2=1 \tag{4.4.3}$$

とおけば， ξ^1,ξ^2 は滑らかな関数で $\xi^1(u_0^1,\,u_0^2)=\xi_0^1,\xi^2\equiv 1$ を満たし，$\mathbf{x}(U)$ の各点で $\xi:=\sum_{i=1}^{2}\xi^i\mathbf{x}_i$ が κ に対する主曲率ベクトルとなる．(4.4.2) を書き換えると

$$\begin{pmatrix}\sum_j h_{1j}\xi^j & \sum_j g_{1j}\xi^j\\ \sum_j h_{2j}\xi^j & \sum_j g_{2j}\xi^j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-\kappa\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

故に

$$0=\begin{vmatrix}\sum_j h_{1j}\xi^j & \sum_j g_{1j}\xi^j\\ \sum_j h_{2j}\xi^j & \sum_j g_{2j}\xi^j\end{vmatrix}=\sum h_{1i}\,g_{2j}\,\xi^i\xi^j-\sum h_{2j}\,g_{1i}\,\xi^i\xi^j.$$

この式に $\xi^2=1$ を代入してまとめると

$$\begin{aligned}&(g_{21}h_{11}-g_{11}h_{12})(\xi^1)^2+(h_{11}g_{22}-h_{22}g_{11})\xi^1+(h_{12}g_{22}-h_{22}g_{12})\\&=0.\end{aligned}$$

この 2 次式の解を x_1,x_2 とおけば，$x_1\neq x_2$ である限りこれらは滑らかな関数だから，x_1,x_2 は U 上で滑らかとなる．こうして U 上の主曲率ベクトル場 $\sum\xi^i\mathbf{x}_i=(x_k\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)\,(k=1,\,2)$ を得る．

$$\begin{aligned}&\langle(x_1\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2),(x_2\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)\rangle=x_1x_2g_{11}+(x_1+x_2)g_{12}+g_{22}\\&=\frac{g_{11}(g_{22}h_{12}-g_{12}h_{22})+g_{12}(g_{11}h_{22}-g_{22}h_{11})+g_{22}(g_{21}h_{11}-g_{11}h_{12})}{g_{21}h_{11}-g_{11}h_{12}}\\&=0\end{aligned}$$

となって，これらは確かに直交している．　▮

定理 4.25 臍点でない曲面上の点の近傍で曲率線が座標曲線となるような正則表示がとれる.

証明 命題 4.24 によって U 上の滑らかなベクトル場 $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ で主曲率方向を U 上の各点で与えるものが存在する. $p \in U$ を通る積分曲線を

$$\frac{d\mathbf{c}_i(t)}{dt} = \mathbf{X}_i \circ \mathbf{c}_i(t), \qquad \mathbf{c}_i(0) = p \qquad (i = 1, 2)$$

とする. $\varepsilon > 0$ を十分小さい数とせよ. $\mathbf{c}_1(t)$ を通る $\mathbf{X}_2$ の積分曲線は, t が $(-\varepsilon, \varepsilon)$ の範囲を動くとき p のある近傍 $U_1(p)$ を単純に覆う. 同様にして, $\mathbf{c}_2(t)$ を通る $\mathbf{X}_1$ の積分曲線は, t が $(-\varepsilon, \varepsilon)$ の範囲を動くとき p のある近傍 $U_2(p)$ を単純に覆う. $U_1(p) \cap U_2(p)$ の連結成分で p を含むものを U_p とおく. 任意の点 $q \in U_p$ に対して q を通る $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ の積分曲線が $\mathbf{c}_2(-\varepsilon, \varepsilon)$, $\mathbf{c}_1(-\varepsilon, \varepsilon)$ とそれぞれ一意的に決まる点 $\mathbf{c}_2(s_2)$, $\mathbf{c}_1(s_1)$ で交わる. $\varphi(q) := (s_1, s_2)$, $\mathbf{x}(s, t) := \varphi^{-1}(s, t)$ と定めると, $\mathbf{x} : (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbf{R}^3$ は滑らかで 1∶1 かつ $\mathbf{x}_s = \mathbf{X}_1$, $\mathbf{x}_t = \mathbf{X}_2$ は 1 次独立だから, $\mathbf{x}$ は求める正則表示となる [Figure 4.4.1]. ∎

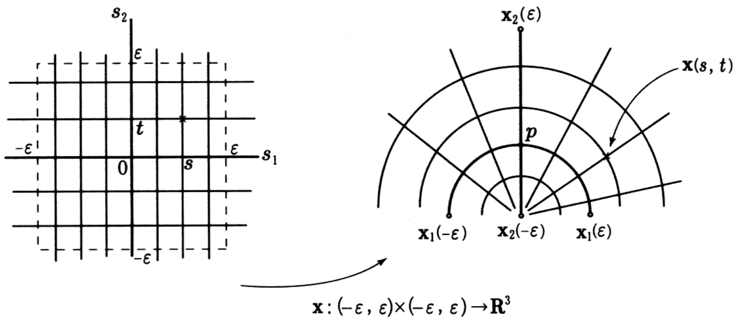


Figure 4.4.1　曲率線を座標曲線とする正則表示

例 4.26 (回転面上の曲率線) 正値関数 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ を母線とする回転面 $\mathbf{x} : \mathbf{R} \times (0, 2\pi) \to \mathbf{R}^3$ を

$$\mathbf{x}(u^1, u^2) := \begin{pmatrix} u^1 \\ f(u^1)\cos u^2 \\ f(u^1)\sin u^2 \end{pmatrix} \qquad ((u^1, u^2) \in \mathbf{R} \times (0, 2\pi))$$

とする. 単位法線ベクトル場を $\mathbf{e}$, $\Delta := \sqrt{1 + (f')^2}$ とおいて,

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ f(u^1)' \cos u^2 \\ f(u^1)' \sin u^2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -f(u^1) \sin u^2 \\ f(u^1) \cos u^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} f' \\ -\cos u^2 \\ -\sin u^2 \end{pmatrix}$$

だから，第 1 基本形式は $ds^2 = (1 + (f')^2)(du^1)^2 + f^2(du^2)^2$ となる．第 2 基本形式の定義式 $h_{ij} := \langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{e} \rangle$ から

$$h_{11} = \frac{-f''}{\Delta}, \qquad h_{12} = 0, \qquad h_{22} = \frac{f}{\Delta}.$$

従って Rodrigues の公式 (4.4.1) より u^1, u^2 の座標曲線はともに曲率線となる．このとき，主曲率 κ_1, κ_2 は

$$\kappa_1 = \frac{h_{11}}{g_{11}} = \frac{-f''}{\Delta^3}, \qquad \kappa_2 = \frac{h_{22}}{g_{22}} = \frac{1}{f\Delta}.$$

問 4.27　上の例の回転面上の 2 つの曲率線 $u^1 \mapsto \mathbf{x}(u^1, u_0^2)$ と $u^2 \mapsto \mathbf{x}(u_0^1, u^2)$ に沿って単位法線ベクトル場を微分して Rodrigues の公式 (4.4.1) を導き，主曲率を求めよ．

問 4.28　例 4.5 の回転トーラスおよび回転放物面上の曲率線と主曲率を求めよ．

問 4.29 (平行曲面 (parallel surface))　$\mathbf{x} : D \to \mathbf{R}^3$ を曲面 $\mathcal{S}$ の正則表示とし，$\mathcal{S}$ の主曲率，平均曲率，Gauss 曲率をそれぞれ κ_1, κ_2, H, K とする．$U \subset D$ は相対コンパクトな領域とする．$\mathbf{y} : U \to \mathbf{R}^3$ を

$$\mathbf{y}(u, v) := \mathbf{x}(u, v) + h\mathbf{e}(u, v) \qquad ((u, v) \in U)$$

と定義する．ここに，$|h| \ll 1$ は十分小さい定数で，$\mathbf{e}$ は $\mathcal{S}$ の単位法線ベクトル場である．

(i)　$\mathbf{y} : U \to \mathbf{R}^3$ が曲面の正則表示となるような h の範囲を $\mathcal{S}$ の主曲率を用いて求めよ．この曲面 $\mathbf{y}(U) := \mathcal{S}_h$ を $\mathcal{S}$ の**平行曲面**という．

(ii)　点 $\mathbf{x}(u, v)$ が $\mathcal{S}$ の臍点であるための必要十分条件は，平行曲面 $\mathcal{S}_h$ の点 $\mathbf{y}(u, v)$ が $\mathcal{S}_h$ の臍点であることを示せ．

(iii)　平行曲面 $\mathcal{S}_h$ の平均曲率，Gauss 曲率を H, K, h を用いて表せ (ヒン

ト：Rodrigues の公式を用いよ).

4.5　漸近方向と漸近線

曲面上の点 p における漸近方向は，p における接平面と曲面との交線の p における接方向である．漸近線の図形的な意味を考えよう．定義 4.17 で与えたように法曲率が 0 となる方向が漸近方向であるから，Gauss 曲率が正の点では接平面と曲面との交わりは 1 点のみで，漸近方向は存在しない．平坦点では全ての方向が漸近方向である．Gauss 曲率が負である点では異なる主曲率の符号が反対で，接平面と曲面との交わりが定める漸近方向は 2 方向ある．第 2 基本形式の階数が 1 の点では漸近方向は 1 つある．このとき，主曲率の 1 つは 0 で他は 0 でない．主曲率 0 に対応する主曲率方向は漸近方向と一致する．

問 4.30　正円柱の正則表示を

$$\mathbf{x}(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} \cos u^1 \\ \sin u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} \qquad ((u^1, u^2) \in (0, 2\pi) \times \mathbf{R})$$

とする．正円柱の曲率線と漸近線を求めよ．

命題 4.31　曲面上の点 p で Gauss 曲率が負ならば，p の近傍内で主曲率方向は漸近方向を 2 等分する．更に，漸近方向は滑らかなベクトル場を定義する．

証明　座標曲線が主曲率線となる p の近傍内で局所座標系 $\mathbf{x} : D \to \mathbf{R}^3$ が

$$g_{12} = h_{12} = 0, \qquad h_{11} = \lambda, \qquad h_{22} = \mu \qquad (\lambda > 0 > \mu)$$

を満たすようにとる．p における単位ベクトル $\mathbf{a} = a^i \mathbf{x}_i$, $\mathbf{b} = b^i \mathbf{x}_i$ を漸近方向にとると

$$h_{ij} a^i a^j = \lambda (a^1)^2 + \mu (a^2)^2 = 0.$$

これより

$$a^1 = \pm \sqrt{\frac{-\mu}{\lambda}}\, |a^2|.$$

更に

$$1 = \|\mathbf{a}\|^2 = g_{11}(a^1)^2 + g_{22}(a^2)^2$$

だから

$$a^1 = \pm\sqrt{\frac{-\mu}{\lambda g_{22} - \mu g_{11}}}, \qquad a^2 = \pm\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda g_{22} - \mu g_{11}}}.$$

従って

$$\mathbf{a} = \sqrt{\frac{-\mu}{\lambda g_{22} - \mu g_{11}}}\,\mathbf{x}_1 + \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda g_{22} - \mu g_{11}}}\,\mathbf{x}_2,$$
$$\mathbf{b} = \sqrt{\frac{-\mu}{\lambda g_{22} - \mu g_{11}}}\,\mathbf{x}_1 - \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda g_{22} - \mu g_{11}}}\,\mathbf{x}_2$$

だから $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ は滑らかな単位ベクトル場である．上式から直ちに

$$\langle \mathbf{a},\, \mathbf{x}_1\rangle = \langle \mathbf{b},\, \mathbf{x}_1\rangle, \qquad \langle \mathbf{a},\, \mathbf{x}_2\rangle = -\langle \mathbf{b},\, \mathbf{x}_2\rangle$$

で，証明終わり．■

定理 4.25 と同じようにして以下の定理を得る．証明は定理 4.25 と同様だから省略する．

定理 4.32　Gauss 曲率が負の点の近傍内で漸近線が座標曲線となる正則表示が存在する．

例 4.33 (双曲放物面上の漸近線)　$a > 0$ を定数として，双曲放物面 (hyperbolic paraboloid) の正則表示を

$$\mathbf{x}(u, v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ auv \end{pmatrix} \qquad ((u,\, v) \in \mathbf{R}^2)$$

とする．単位法線ベクトル場を $\mathbf{e}$ とすると，$\Delta := \sqrt{1 + a^2(u^2 + v^2)}$ とおいて，

$$\mathbf{x}_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ av \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ au \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} -av \\ -au \\ 1 \end{pmatrix}.$$

更に，

$$\mathbf{x}_{uu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_{uv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_{vv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

だから，$u^1 := u$, $u^2 := v$ として

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1+a^2v^2 & a^2uv \\ a^2uv & 1+a^2u^2 \end{pmatrix}, \qquad (h_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{a}{\Delta} \\ \dfrac{a}{\Delta} & 0 \end{pmatrix}.$$

$\xi = \sum \xi^i \mathbf{x}_i$ を漸近方向ベクトルとすると，

$$\sum_{i,j=1}^{2} h_{ij}\xi^i\xi^j = 2\frac{a}{\Delta}\,\xi^1\xi^2 = 0.$$

故に $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ が漸近方向ベクトルである．

双曲放物面上の任意に固定した点 $\mathbf{x}(u_0,\, v_0)$ を通る 2 本の漸近線を求めよう．$\mathbf{x}(u_0,\, v_0)$ を通り，$\mathbf{x}_i(u_0,\, v_0)$ を方向ベクトルとする直線 $\ell_i(t)$ は $t \in \mathbf{R}$ をパラメータとして $\ell_i(t) = \mathbf{x}(u_0,\, v_0) + t\mathbf{x}_i(u_0,\, v_0)$ と書ける．従って，

$$\ell_1(t) = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ au_0\,v_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ av_0 \end{pmatrix} = \mathbf{x}(u_0+t,\, v_0), \quad \ell_2(t) = \mathbf{x}(u_0,\, v_0+t)$$

となって，$\ell_i(\mathbf{R})$ は曲面に含まれる．$\ell_i(t)$ における速度ベクトルは $\mathbf{x}_i$ だから，ℓ_i は漸近線に他ならない．

次に，点 $\mathbf{x}(u_0,\, v_0)$ における主曲率方向ベクトル η_1, η_2 を求める．命題 4.31 によって漸近方向は主曲率ベクトルによって 2 等分されるから

$$\eta_1 := \frac{\mathbf{x}_u}{\|\mathbf{x}_u\|} + \frac{\mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_v\|}, \qquad \eta_2 := \frac{\mathbf{x}_u}{\|\mathbf{x}_u\|} - \frac{\mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_v\|}$$

とおけば，この η_1, η_2 が法曲率

$$\kappa_n(\eta) := \frac{\displaystyle\sum_{ij} h_{ij}\eta^i\eta^j}{\displaystyle\sum_{ij} g_{ij}\eta^i\eta^j}$$

の極値を与えることを示そう．簡単のため $E := g_{11}$, $F := g_{12}$, $G := g_{22}$ と書く．このとき，$\langle \eta_1, \eta_2 \rangle = 0$ は明らか．

$$\eta := \eta^1\frac{\mathbf{x}_1}{\sqrt{E}} + \eta^2\frac{\mathbf{x}_2}{\sqrt{G}}$$

とおいて，η の定める法曲率 $\kappa_n(\eta)$ は

$$\kappa_n(\eta) = \frac{2\dfrac{a}{\Delta}\,\eta^1\eta^2}{\sqrt{EG}\,(\eta^1)^2 + 2F\eta^1\eta^2 + \sqrt{EG}\,(\eta^2)^2}$$

で与えられる．$\eta^1 := t\eta^2$ とおいて上式を t に関する式 $\kappa_n(\eta) = \kappa_n(\eta(t))$ とみ

なすと，$\kappa_n(t)$ は $t=1$ で最大値，$t=-1$ で最小値をとる．すなわち，$t=1$ は η_1 に対応し，$t=-1$ は η_2 に対応する．

4.5.1　Beltrami-Enneper の定理

双曲放物面の例 4.33 で解るように，曲面上の直線は漸近線である．一般の曲っている漸近線についての図形的イメージを描くことはむずかしい．以下の定理は漸近線の幾何的意味を与えている．

定理 4.34 (Beltrami-Enneper の定理)　曲面の漸近線 $\mathbf{x}(s)=\mathbf{x}(u^1(s),\, u^2(s))$ の曲率が 0 でないとき，$\mathbf{x}(s)$ の捩率を τ とおけば，曲線上の Gauss 曲率は

$$K(\mathbf{x}(s)) = -\tau^2(s)$$

で与えられる．ここに s は漸近線の弧長である．

証明

$$\mathbf{x}'(s) = \xi_1(s) = \sum_i \frac{du^i(s)}{ds}\,\mathbf{x}_i$$

は漸近方向だから，

$$v^i := \frac{du^i(s)}{ds} \qquad (i=1,\,2)$$

とおけば

$$\sum_{i\,j} h_{ij} v^i v^j = 0.$$

更に

$$\begin{aligned}
\xi_1' &= \mathbf{x}''(s) = \sum_k \Big\{ (v^k)' + \sum_{ij} \Gamma^k_{ij} v^i v^j \Big\} \mathbf{x}_k =: \sum_k w^k \mathbf{x}_k,\\
\mathbf{x}''' &= \sum_k (w^k)'\mathbf{x}_k + \sum_{\ell m} w^\ell \mathbf{x}_{\ell m} v^m = (\kappa\xi_2)'\\
&= \kappa'\xi_2 + \kappa(-\kappa\xi_1 + \tau\xi_3).
\end{aligned}$$

従って $\xi_1(s)$, $\xi_2(s)$ は $\mathbf{x}(s)$ における接平面の正規直交基底となる．

$$\kappa^2 = \langle \xi_1',\, \xi_1' \rangle = \sum_{ab} g_{ab} w^a w^b.$$

$\xi_3 = \xi_1 \times \xi_2$ は曲面の単位法線ベクトル場だから

$$\kappa\tau = \langle \mathbf{x}''',\, \mathbf{e} \rangle = \sum_{ij} h_{ij} v^i w^j.$$

故に仮定 $\kappa \neq 0$ より

$$\tau^2 = \frac{\left(\sum_{ij} h_{ij} v^i w^j\right)^2}{\kappa^2} = \frac{\sum_{ab\ell m} h_{a\ell} h_{bm} v^a v^b w^\ell w^m}{\sum_{ab} g_{ab} w^a w^b}$$

となるから，これより

$$\tau^2 = -\frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})} = -K \tag{4.5.1}$$

を得る． ∎

問 4. 35 第 1 基本形式と第 2 基本形式が以下を満たすとき，関係式 (4.5.1) を証明せよ．

$$\begin{aligned} &g_{ij} v^i v^j = 1, \qquad g_{ij} v^i w^j = 0, \qquad h_{ij} v^i v^j = 0, \\ &g_{ij} w^i w^j = \kappa^2, \qquad h_{ij} v^i w^j = \kappa\tau. \end{aligned} \tag{4.5.2}$$

問 4. 36 (管曲面 (tube surface)) $\mathbf{R}^3$ 内の滑らかな閉曲線 $\mathcal{C}$ の弧長を $s \in [0, \ell]$ とし, 曲率と捩率をそれぞれ κ, $\tau \neq 0$ とおく．

Frenet 標構を $(\mathbf{x}(s), \xi_1(s), \xi_2(s), \xi_3(s))$ とすると

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(s) &= \xi_1(s), \\ \xi_1' &= \qquad \kappa\xi_2, \\ \xi_2' &= -\kappa\xi_1 \qquad + \tau\xi_3, \\ \xi_3' &= \qquad -\tau\xi_2 \end{aligned}$$

となる．このとき，以下の問に答えよ．

(i) 集合 $\mathcal{S} \subset \mathbf{R}^3$ をベクトル値関数

$$\mathbf{X}(s, \theta) := \mathbf{x}(s) + r(\cos\theta\xi_2 + \sin\theta\xi_3) \qquad ((s, \theta) \in (0, \ell) \times (0, 2\pi))$$

の像と定義する．このとき，$\mathcal{S}$ が $\mathbf{R}^3$ の曲面を定義するための定数 $r > 0$ の条件を求めよ．

(ii) $\mathcal{S}$ が曲面のとき，$\mathcal{S}$ の第 1 基本形式，第 2 基本形式および面積素 dM を求めよ．この曲面を**管曲面** (tube surface)，$\mathcal{C}$ を**中心曲線**という．

(iii) $\mathcal{S}$ の Gauss 曲率，平均曲率および主曲率，曲率線を求めよ．

(iv) $\mathcal{S}$ 上で以下の積分を求めよ：

$$\int_S H^2 \, dM. \tag{4.5.3}$$

(v)　上で求めた積分値を最小にする曲線 $\mathcal{C}$ と最小値を求めよ．

(vi)　$\mathcal{C} \subset \mathbf{R}^3$ が結び糸 (knot) のとき，$\mathcal{C}$ を中心曲線とする管曲面に対して (4.5.3) の下限を求めよ．

問 4.37　第 3 基本形式 $III := \langle d\mathbf{e}, d\mathbf{e} \rangle$ に関しては以下の公式が成り立つことを証明せよ：

$$III + 2HII + KI = 0. \tag{4.5.4}$$

注意 4.38　この公式から Beltrami-Enneper の定理 4.34 が証明される．すなわち，$\mathbf{x}'(s) = \xi_1(s)$ とおいて

$$III(\xi_1, \xi_1) + 2H \cdot II(\xi_1, \xi_1) + K \cdot I(\xi_1, \xi_1) = 0$$

は ξ_1 が漸近方向だから $II(\xi_1, \xi_1) = 0$ である．漸近線に沿って単位法線ベクトル場を微分すると

$$\frac{d\mathbf{e}}{ds} = \frac{d\xi_3}{ds} = -\tau \xi_2.$$

従って

$$III(\xi_1, \xi_1) = \left\langle \frac{d\mathbf{e}}{ds}, \frac{d\mathbf{e}}{ds} \right\rangle = \tau(s)^2$$

を得る．ところが，$KI(\xi_1, \xi_1) = K(\mathbf{x}(s))$ だから $\tau^2(s) + K(\mathbf{x}(s)) = 0$.　∎

問 4.39　問 4.5 の回転トーラスの内側

$$\Omega := \left\{ \mathbf{x}(u, v) \,\middle|\, -\pi < u < -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < u < \pi \right\}$$

では Gauss 曲率は負となり，半径がちょうど a の平行円 $u = \pm\dfrac{\pi}{2}$ は漸近線である．Ω の各点を通る漸近線の挙動を調べよ．

第5章　曲面の基本方程式と積分可能条件

曲線の場合は Frenet 標構によって曲線の様子が記述できた．曲面の場合にも曲線の Frenet 標構に対応する曲面の基本方程式がある．曲面の形を決定する要素は何かという問題に関して，曲線と同様の考察をすすめることができる．Gauss の方程式，Weingarten の方程式および Mainardi-Codazzi の積分可能条件などの曲面論で重要な役を果たす公式を導く．Gauss の公式は Gauss 曲率が第 1 基本形式とその 2 階までの微分のみによって表わされることを示し，Riemann 幾何学への道を開いた．ここで使う Index は $i, j, k, \cdots = 1, 2$ と約束する．

5.1　曲面の基本方程式

$\mathbf{x} : D \to \mathbf{R}^3$ を曲面の正則表示，$(u_1, u_2) \in U$ に対して

$$\mathbf{x}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}, \qquad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\|}$$

とおく．更に

$$\mathbf{x}_{ij} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u_j \partial u_i}, \qquad \mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial u_i}.$$

$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{e}\}$ は空間の基底だから，点 $\mathbf{x}(u_1, u_2)$ における任意のベクトルはこれらの 1 次結合で書ける．従って

$$\mathbf{x}_{ij} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \mathbf{x}_k + \beta_{ij}\mathbf{e}, \tag{5.1.1}$$

$$\mathbf{e}_i = \sum_j \Lambda_i^j \mathbf{x}_j \tag{5.1.2}$$

とおいて，係数 Γ_{ij}^k, β_{ij}, Λ_i^j を定めよう．ここで，$\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e} \rangle = 0$ より $\mathbf{e}_i \in T_{\mathbf{x}(u_1,u_2)}$

で (5.1.2) が従う．第 2 基本形式の定義から

$$h_{ij} = \langle \mathbf{x}_{ij},\, \mathbf{e} \rangle = \beta_{ij}$$

が分かる．更に $\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{x}_{ji}$ だから，この関係式から

$$\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ji}^{k}, \qquad h_{ij} = h_{ji}.$$

第 1 基本形式 $I = \sum_{ij} g_{ij} du^i du^j$ は正定値だから，(g_{ij}) の逆行列を (g^{ij}) とおけば

$$\sum_j g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k.$$

$\mathbf{x}_k$ と $\mathbf{x}_{ij}$ との内積をとれば以下の関係式を得る：

$$\langle \mathbf{x}_{ij},\, \mathbf{x}_k \rangle = \sum_{\ell} \Gamma_{ij}^{\ell} g_{\ell k}.$$

ここで**第 2 種 Christoffel 記号** $[ij\,;\,k]$ を

$$[ij\,;\,k] := \langle \mathbf{x}_{ij},\, \mathbf{x}_k \rangle = \sum_{\ell} \Gamma_{ij}^{\ell} g_{\ell k}$$

とおく．更に

$$\partial_i := \frac{\partial}{\partial u_i}.$$

このとき

$$\partial_j g_{i\ell} = \partial_j \langle \mathbf{x}_i,\, \mathbf{x}_\ell \rangle = \langle \mathbf{x}_{ij},\, \mathbf{x}_\ell \rangle + \langle \mathbf{x}_i,\, \mathbf{x}_{\ell j} \rangle = [ij\,;\,\ell] + [\ell j\,;\,i]. \tag{5.1.3}$$

同様にして

$$\partial_i g_{\ell j} = [\ell i\,;\,j] + [ji\,;\,\ell], \tag{5.1.4}$$

$$\partial_\ell g_{ji} = [j\ell\,;\,i] + [i\ell\,;\,j]. \tag{5.1.5}$$

上の 2 つの式 (5.1.3) と (5.1.4) の和から (5.1.5) を引くと

$$2[ij\,;\,\ell] = \partial_i g_{j\ell} + \partial_j g_{\ell i} - \partial_\ell g_{ij}$$

を得る．

上式に第 1 基本形式の逆行列を掛けて

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \sum_{\ell} g^{k\ell} (\partial_i g_{j\ell} + \partial_j g_{\ell i} - \partial_\ell g_{ij}) &= \sum_{\ell} [ij\,;\,\ell] g^{k\ell} \\ &= \sum_{a,\ell} \Gamma_{ij}^{a} g_{a\ell} g^{k\ell} = \sum_{a} \Gamma_{ij}^{a} \delta_a^k = \Gamma_{ij}^{k}.\end{aligned}$$

これより Γ_{ij}^{ℓ} は第 1 基本形式とその微分で表せる：

$$\Gamma_{ij}^{\ell} = \frac{1}{2}\sum_{\ell} g^{k\ell}(\partial_i g_{j\ell} + \partial_j g_{\ell i} - \partial_\ell g_{ij}).$$

これを**第 1 種 Christoffel 記号**という．故に $\mathbf{x}_{ij}$ は以下で与えられる：

$$\mathbf{x}_{ij} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \mathbf{x}_k + h_{ij}\mathbf{e}.$$

次に $\mathbf{e}_i$ と $\mathbf{x}_\ell$ の内積をとれば

$$-h_{i\ell} = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{x}_\ell \rangle = \sum_k \Lambda_i^k \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_\ell \rangle = \sum_k \Lambda_i^k g_{k\ell}.$$

上式に (g_{ij}) の逆行列を掛ければ

$$-h_i^j := -\sum_\ell h_{i\ell} g^{\ell j} = \sum_{\ell,k} \Lambda_i^k g_{k\ell} g^{\ell j} = \sum_k \Lambda_i^k \delta_k^j = \Lambda_i^j.$$

故に

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial u^i} = -\sum_\ell h_{i\ell} g^{\ell j} \mathbf{x}_j = -\sum_j h_i^j \mathbf{x}_j.$$

以上をまとめて：

定理 5.1 (曲面の基本方程式)　C^3-級曲面に対し，曲面の基本方程式

$$\mathbf{x}_{ij} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \mathbf{x}_k + h_{ij}\mathbf{e} \qquad (\text{Gauss の方程式}), \tag{5.1.6}$$

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial u^i} = -\sum_{\ell,j} h_{i\ell} g^{\ell j} \mathbf{x}_j = -\sum_j h_i^j \mathbf{x}_j \qquad (\text{Weingarten の方程式}) \tag{5.1.7}$$

が成立する．ここに

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_\ell g^{k\ell}(\partial_i g_{\ell j} + \partial_j g_{i\ell} - \partial_\ell g_{ij}).$$

例 5.2　グラフ曲面 (例 3.2) の基本方程式を調べてみよう．Christoffel 記号は Gauss の方程式 (5.1.6) から求まる．例 4.8 で求めた式 $h_{ij} = \langle x_{ij}, \mathbf{e} \rangle = \dfrac{1}{\Delta} f_{ij}$ が成り立つ．これを (5.1.6) に代入して：

$$\mathbf{x}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{ij} \end{pmatrix} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \mathbf{x}_k + \frac{f_{ij}}{\Delta} \cdot \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -f_1 \\ -f_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

従って Christoffel 記号は

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{f_k f_{ij}}{\Delta^2} \qquad (\forall i,\ j,\ k = 1,\ 2).$$

特に

$$h_1^1 = \frac{f_{11}(1+f_2^2) - f_{12}f_1f_2}{\Delta^3},$$

$$h_2^2 = \frac{f_{22}(1+f_1^2) - f_{12}f_1f_2}{\Delta^3}.$$

これから

$$K = \frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}{\Delta^4}, \tag{5.1.8}$$

$$H = \frac{f_{11}(1+f_2^2) - 2f_{12}f_1f_2 + f_{22}(1+f_1^2)}{2\Delta^3}. \tag{5.1.9}$$

5.2　積分可能条件

基本方程式は曲線の場合の Frenet-Serret の公式に相当する．曲線の場合には曲率と捩率を与えれば曲線は運動を除いて決まる．曲面を決定する要素は第 1 基本形式と第 2 基本形式だけだろうか？　すなわち正定値 2 次形式 $\sum_{ij} g_{ij}du^i du^j$ と対称 2 次形式 $\sum_{ij} h_{ij}du^i du^j$ を与えたとき，これらをそれぞれ第 1，第 2 基本形式とする曲面の局所的な正則表示が得られるだろうか？　このとき，条件

$$\mathbf{x}_{ijk} = \mathbf{x}_{ikj} = \mathbf{x}_{jki} = \mathbf{x}_{kij} = \cdots$$

は g_{ij} と h_{ij} の間の関係式を定めるだろう．これは積分可能条件とよばれる．曲面 S の正則表示 $\mathbf{x} : D \to \mathbf{R}^3$ が C^∞-級であると仮定する．

5.2.1　Einstein の規約

計算にさいして，$\sum_{\ell} \Gamma_{ij}^{\ell}\mathbf{x}_{\ell} = \Gamma_{ij}^{\ell}\mathbf{x}_{\ell}$ のように加算のための index はつねに上下にひと組ずつ現れる．このとき Einstein の規約によって $\sum$ 記号を省略する．**以後断らない限り，この規約を用いることにする．**

基本方程式を用いて上のベクトルを正規基底 $\{\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \mathbf{e}\}$ で表そう．

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{ijk} &= \partial_k \mathbf{x}_{ij} = \partial_k(\Gamma^\ell_{ij}\mathbf{x}_\ell + h_{ij}\mathbf{e}) \\ &= \partial_k\Gamma^\ell_{ij}\mathbf{x}_\ell + \Gamma^\ell_{ij}\mathbf{x}_{\ell k} + \partial_k h_{ij}\mathbf{e} + h_{ij}\mathbf{e}_k \\ &= \partial_k\Gamma^\ell_{ij}\mathbf{x}_\ell + \Gamma^a_{ij}(\Gamma^\ell_{ak}\mathbf{x}_\ell + h_{ak}\mathbf{e}) + \partial_k h_{ij}\mathbf{e} + h_{ij}(-h_{ka}g^{a\ell}\mathbf{x}_\ell) \\ &= (\partial_k\Gamma^\ell_{ij} + \Gamma^a_{ij}\Gamma^\ell_{ka} - h_{ij}h_{ka}g^{a\ell})\mathbf{x}_\ell + (\Gamma^a_{ij}h_{ak} + \partial_k h_{ij})\mathbf{e}.\end{aligned}$$

この曲面の正則表示は滑らかだから $\mathbf{x}_{ijk} = \mathbf{x}_{ikj}$ が成立する．ここで

$$R^\ell{}_{ijk} = \partial_k\Gamma^\ell_{ij} - \partial_j\Gamma^\ell_{ik} + \Gamma^a_{ij}\Gamma^\ell_{ak} - \Gamma^a_{ik}\Gamma^\ell_{aj} \tag{5.2.1}$$

とおけば,

$$\mathbf{x}_{ijk} - \mathbf{x}_{ikj} = \mathbf{0}$$

より

$$\begin{aligned}&(R^\ell{}_{ijk} - h_{ij}h_{ka}g^{a\ell} + h_{ik}h_{ja}g^{a\ell})\mathbf{x}_\ell \\ &\quad + (\partial_k h_{ij} - \partial_j h_{ik} + \Gamma^a_{ij}h_{ak} - \Gamma^a_{ik}h_{aj})\mathbf{e} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

を得る．従って

$$\begin{aligned}&R^\ell{}_{ijk} = h_{ij}h_{ka}g^{a\ell} - h_{ik}h_{ja}g^{a\ell}, \\ &\partial_k h_{ij} - \partial_j h_{ik} + \Gamma^a_{ij}h_{ak} - \Gamma^a_{ik}h_{aj} = 0\end{aligned}$$

が成り立つ．

次に，条件

$$\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{e}_{ji} \qquad (i,\ j = 1,\ 2)$$

からいかなる関係式が導かれるだろうか？　基本方程式から $h^i_j = h_{jk}g^{ki}$ に注意して

$$\mathbf{e}_{ik} = -\partial_k(h^\ell_i\mathbf{x}_\ell) = -(\partial_k h^\ell_i)\mathbf{x}_\ell - h^m_i(\Gamma^\ell_{mk}\mathbf{x}_\ell + h_{mk}\mathbf{e}).$$

これをまとめて

$$\mathbf{e}_{ik} = -(\partial_k h^\ell_i + h^m_i\Gamma^\ell_{mk})\mathbf{x}_\ell - h^m_i h_{mk}\mathbf{e}.$$

同様にして

$$\mathbf{e}_{ki} = -(\partial_i h^\ell_k + h^m_k\Gamma^\ell_{mi})\mathbf{x}_\ell - h^m_k h_{mi}\mathbf{e}.$$

$\mathbf{e}_{ik} - \mathbf{e}_{ki} = \mathbf{0}$ より

$$\partial_k h^\ell_i - \partial_i h^\ell_k = h^m_k\Gamma^\ell_{mi} - h^m_i\Gamma^\ell_{mk}, \tag{5.2.2}$$

$$h_k^m h_{mi} - h_i^m h_{mk} = 0 \qquad (\forall i,\, k,\, \ell = 1,\, 2). \tag{5.2.3}$$

(5.2.2) の両辺に $g_{\ell p}$ を掛けて ℓ について加えると，$0 = \partial_k(g^{m\ell}g_{\ell p}) = (\partial_k g^{m\ell})g_{\ell p} + g^{m\ell}(\partial_k g_{\ell p})$ より

$$\begin{aligned}
&(\partial_k h_i^\ell - \partial_i h_k^\ell)g_{\ell p} \\
&= \Big((\partial_k h_{im})g^{m\ell} + h_{im}(\partial_k g^{m\ell}) - (\partial_i h_{km})g^{m\ell} - h_{km}(\partial_i g^{m\ell})\Big)g_{p\ell} \\
&= \partial_k h_{im}\delta_p^m - \partial_i h_{km}\delta_p^m + h_{im}(\partial_k g^{m\ell})g_{\ell p} - h_{km}(\partial_i g^{m\ell})g_{p\ell} \\
&= \partial_k h_{ip} - \partial_i h_{kp} + h_{im}(-g^{m\ell}\partial_k g_{\ell p}) - h_{km}(-g^{\ell m}\partial_i g_{\ell p}) \\
&= \partial_k h_{ip} - \partial_i h_{kp} - h_i^\ell \partial_k g_{p\ell} + h_k^\ell \partial_i g_{p\ell}.
\end{aligned}$$

(5.2.2) の右辺は

$$(h_k^m \Gamma_{mi}^\ell - h_i^m \Gamma_{mk}^\ell)g_{\ell p} = \{h_k^m[mi\,;\,p] - h_i^m[mk\,;\,p]\}.$$

よって，左辺＝右辺より

$$\partial_k h_{ip} - \partial_i h_{kp} = h_i^\ell\{\partial_k g_{p\ell} - [\ell k\,;\,p]\} - h_k^\ell\{\partial_i g_{p\ell} - [\ell i\,;\,p]\}.$$

ここで

$$\partial_k g_{p\ell} - [\ell k\,;\,p] = [kp\,;\,\ell], \qquad \partial_i g_{p\ell} - [\ell i\,;\,p] = [ip\,;\,\ell]$$

だから，これを上式に代入すれば

$$\partial_k h_{ip} - \partial_i h_{kp} = h_{iq}\Gamma_{kp}^q - h_{kq}\Gamma_{ip}^q.$$

これは Codazzi の方程式に他ならない．以上をまとめて，

定理 5.3　C^3-級曲面 $\mathbf{x} : D \to \mathbf{R}^3$ に対して

$$R^m{}_{ijk} = \partial_k\Gamma_{ij}^m - \partial_j\Gamma_{ik}^m + \Gamma_{ij}^\ell\Gamma_{\ell k}^m - \Gamma_{ik}^\ell\Gamma_{i\ell}^m = h_{ij}h_k^m - h_{ik}h_j^m, \tag{5.2.4}$$

$$\partial_k h_{ij} - \partial_j h_{ik} = h_{j\ell}\Gamma_{ik}^\ell - h_{k\ell}\Gamma_{ij}^\ell \tag{5.2.5}$$

が全ての $i,\, j,\, k,\, \ell = 1,\, 2$ に対して成立する．はじめの式を **Gauss の積分可能条件**，2 番目の式を **Codazzi の積分可能条件**という．

偏微分方程式の解の存在と一意性の理論から曲面の基本定理が成り立つ．

定理 5.4 (曲面の存在定理)　平面内の領域 D で定義された 6 個の滑らかな関数 $g_{11},\, g_{12},\, g_{22}$ と $h_{11},\, h_{12},\, h_{22}$ が (5.2.4)，(5.2.5) および $g_{11} > 0,\, g_{22} > 0,\, \det(g_{ij}) > 0$ を満たすとせよ．このとき，点 $(u_0^1,\, u_0^2) \in D$ のまわりの十分小

さい近傍 U_0 と U_0 で定義された曲面の正則表示 $\mathbf{x}: U_0 \to \mathbf{R}^3$ が存在して，第1基本形式および第2基本形式が $I = g_{ij}du^i du^j$, $II = h_{ij}du^i du^j$ となる．ただし，$g_{12} = g_{21}$, $h_{12} = h_{21}$ である．

5.3 Gauss の公式

${R^\ell}_{ijk}$ を Riemann の曲率テンソル (の成分) という．曲面の議論では曲率テンソルの詳しい説明はあまり必要でないから省く．ここでは Gauss の積分可能条件 (5.2.4) を利用して曲率テンソルの性質を調べる．$R_{abcd} := g_{a\ell}{R^\ell}_{bcd}$ とおくと以下の性質が解る：

問 5.5 曲率テンソルは以下の性質を持つことを公式 (5.2.4) と第2基本形式の対称性を用いて示せ．

(i) $R_{abcd} = -R_{abdc} = -R_{bacd}$.

(ii) $R_{abcd} + R_{acdb} + R_{adbc} = 0$.

(iii) $R_{abcd} = R_{cdab}$.

特に，曲面の上では $R_{1212} = R_{2121}$ のみが本質的で，他は ($R_{1112} = R_{1222} = R_{1111} = R_{2222} = 0$) 全て 0 である．上で述べた定理 5.3 は Gauss 曲率が第1基本形式のみで決まるというきわめて重要な意味を持つ．これを Gauss Egregima Theorem とよぶ．

定理 5.6 (Gauss Egregima Theorem) Gauss 曲率は第1基本形式とその2階偏微分係数のみで決まる．すなわち

$$K = \frac{-R_{1212}}{\det(g_{ij})}.$$

証明 定理 5.3 から $R_{1212} = g_{1m}{R^m}_{212} = h_{21}h_{12} - h_{22}h_{11}$ だから，Gauss 曲率の定義 4.17 によって

$$K = \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})} = \frac{-R_{1212}}{\det(g_{ij})}. \qquad \blacksquare$$

例 5.7 第1基本形式が

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$$

で与えられているとき，第1基本形式のみから Gauss 曲率を計算しよう．

まず，$u^1 = u$, $u^2 = v$ として Christoffel 記号を求めると，

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{11}) = \frac{E_1}{2E}, \qquad \Gamma^2_{11} = \frac{1}{2}g^{22}(-\partial_2 g_{11}) = \frac{-E_2}{2G},$$
$$\Gamma^1_{12} = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_2 g_{11}) = \frac{E_2}{2E}, \qquad \Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_1 g_{22}) = \frac{G_1}{2G},$$
$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2}g^{11}(-\partial_1 g_{22}) = \frac{-G_1}{2E}, \qquad \Gamma^2_{22} = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2 g_{22}) = \frac{G_2}{2G}.$$

これを曲率テンソルの式に代入して

$$\begin{aligned} R^1{}_{212} &= \partial_2\Gamma^1_{21} - \partial_1\Gamma^1_{22} + \Gamma^m_{21}\Gamma^1_{m2} - \Gamma^m_{22}\Gamma^1_{m1} \\ &= \partial_2\left(\frac{E_2}{2E}\right) - \partial_1\left(\frac{-G_1}{2G}\right) \\ &\quad + \left\{\left(\frac{E_2}{2E}\right)^2 - \frac{-G_1}{2E}\,\frac{E_1}{2E}\right\} + \left\{\frac{G_1}{2G}\,\frac{-G_1}{2E} - \frac{G_2}{2G}\,\frac{E_2}{2E}\right\} \\ &= \frac{E_{22}+G_{11}}{2E} - \frac{1}{4}\left\{\frac{E_2^2 + E_1G_1}{E^2} + \frac{G_1^2 + E_2G_2}{EG}\right\}. \end{aligned}$$

上式を更に変形すると以下の Gauss の公式を得る．

$$\begin{aligned} K &= \frac{-R_{1212}}{EG} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\right]. \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

特に，ある点 p で

$$E_2 = G_1 = 0$$

が成立すれば，後で Hilbert の補題 10.17 の証明に使われる以下の公式を得る：

$$\begin{aligned} K(p) = -\frac{g_{11}R^1{}_{212}}{EG} &= -\frac{1}{2G}\left(\frac{E_{22}}{E} + \frac{G_{11}}{E}\right) \\ &= \frac{-1}{2EG}(E_{22}+G_{11}). \end{aligned}$$

第6章　Gauss-Bonnetの定理

Gauss 曲率の曲面上にわたる積分が曲面の位相不変量に等しいという Gauss-Bonnet の定理は，微分幾何学と位相幾何学を結びつける重要な定理である．微分形式や外微分を用いた Codazzi, Weingarten の方程式および Gauss 曲率の表示などの必要な準備をする．まず，曲面上の (相対コンパクト) 領域上でこの定理を証明し，次に閉曲面上でも証明する．より一般に，必ずしも向き付け可能でないコンパクトな 2 次元 Riemann 多様体に対しても Gauss-Bonnet の定理が成立することを示そう．

6.1　外微分形式

6.1.1　外微分形式の定義

この節で外微分形式，あるいは単に微分形式と呼ばれるものについて述べる．

微分積分学で学んだように，微分可能関数 $f(u,\, v)$ の微分 df は

$$df = \frac{\partial f}{\partial u}\, du + \frac{\partial f}{\partial v}\, dv$$

と定義する．これを微分幾何学では次のように解釈する；

D を uv-平面内の領域とし，$\mathbf{x}\ :\ D \to \mathbf{R}^3$ を曲面の正則表示とする．点 $P = \mathbf{x}(u,\, v)$, $(u,\, v) \in D$ における接ベクトル V_P を

$$V_P = a\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} + b\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v$$

とおいたとき，

$$df(V_P) := a\frac{\partial f}{\partial u} + b\frac{\partial f}{\partial v}$$

によって $df\ :\ T_P \to \mathbf{R}$ を定義すると，df は接空間 T_P 上の線形関数である．

特に，座標関数の微分 du, dv に対しては

$$du(V_P) = a, \qquad dv(V_P) = b$$

が定義から従う．また，$V_P = \mathbf{x}_u$ と $W_P = \mathbf{x}_v$ に対して

$$du(\mathbf{x}_u) = 1, \qquad dv(\mathbf{x}_u) = 0,$$
$$du(\mathbf{x}_v) = 0, \qquad dv(\mathbf{x}_v) = 1$$

が成り立つ．

ベクトル場の定義は 9.2 (Riemann 計量) の直前にある．$\mathbf{x}(D)$ 上の接ベクトル場を

$$V = \xi(u, v)\mathbf{x}_u + \eta(u, v)\mathbf{x}_v$$

とおく．$\xi(u, v)$, $\eta(u, v)$ が微分可能な関数であるとき，V を**微分可能な接ベクトル場**という．

$$\varphi = f(u, v)\, du + g(u, v)\, dv$$

を領域 D 上の **1 次外微分形式**，あるいは単に **1 次微分形式**という．各点 P で

$$\varphi(V_P) := \xi f + \eta g$$

によって，$\varphi : T_P \to \mathbf{R}$ を定義すると，φ は接空間 T_P 上の線形関数である．

φ と ψ を 1 次微分形式とする．φ と ψ の**外積** $\varphi \wedge \psi$ を，任意の接ベクトル場 X, Y に対して

$$(\varphi \wedge \psi)(X, Y) := \varphi(X)\,\psi(Y) - \varphi(Y)\,\psi(X)$$

で定義する．$f = f(u, v)$ を D 上で定義された関数とすると，$f du \wedge dv$ を D 上での **2 次微分形式**という．簡単のため関数を 0 次微分形式とよぶこともある．

1 次微分形式の外積に関して次が成立する．

$$\varphi \wedge \psi = -\psi \wedge \varphi, \qquad \psi \wedge \psi = 0.$$

特に

$$du \wedge du = 0, \qquad dv \wedge dv = 0, \qquad du \wedge dv = -dv \wedge du$$

である．

問 6.1　$f(u, v), g(u, v)$ を領域 D で微分可能な関数とし，φ, ψ を領域 D での 1 次微分形式とする．このとき

(i) $df \wedge df = 0, \qquad df \wedge dg = -dg \wedge df.$

(ii) $(f\varphi_1 + g\varphi_2) \wedge \psi = f(\varphi_1 \wedge \psi) + g(\varphi_2 \wedge \psi).$

(iii) $(\varphi \wedge \psi)(fX_1 + gX_2,\, Y) = f(\varphi \wedge \psi)(X_1,\, Y) + g(\varphi \wedge \psi)(X_2,\, Y),$

$(\varphi \wedge \psi)(X,\, Y) = -(\varphi \wedge \psi)(Y,\, X)$

を示せ.

2つの1次微分形式

$$\varphi = f_1 du + g_1 dv, \qquad \psi = f_2 du + g_2 dv$$

に対して φ と ψ の外積は

$$\begin{aligned} \varphi \wedge \psi &= (f_1 du + g_1 dv) \wedge (f_2 du + g_2 dv) \\ &= f_1 g_2 du \wedge dv + g_1 f_2 dv \wedge du \\ &= (f_1 g_2 - g_1 f_2)\, du \wedge dv \end{aligned}$$

となる.

定義 6.2 微分形式の外微分 d を以下のように定義する：

(i) 0次微分形式 f に対して

$$df := \frac{\partial f}{\partial u}\, du + \frac{\partial f}{\partial v}\, dv.$$

(ii) 1次微分形式 $\varphi = f du + g dv$ に対して

$$d\varphi := df \wedge du + dg \wedge dv = \left(-\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial u}\right) du \wedge dv.$$

(iii) 2次微分形式 $\psi = f du \wedge dv$ に対して

$$d\psi := df \wedge du \wedge dv = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\, du + \frac{\partial f}{\partial v}\, dv\right) \wedge du \wedge dv = 0.$$

問 6.3 $f,\, g$ を0次微分形式, φ を1次微分形式とする．このとき

$$\begin{aligned} d(fg) &= df \cdot g + f \cdot dg, \\ d(f\varphi) &= df \wedge \varphi + f d\varphi \end{aligned}$$

が成り立つことを示せ.

外微分に関して，次の性質は重要である.

命題 6.4 微分形式 ω に対して

$$d^2\omega = d(d\omega) = 0$$

が成り立つ．

証明　もしも ω が 1 次微分形式ならば，$d\omega$ は 2 次微分形式である．従って $d^2\omega = d(d\omega) = 0$ となる．

同様にして，もしも ω が 2 次微分形式ならば，$d^2\omega = d(d\omega) = 0$ が成り立つ．$\omega = f$ が関数であるとき，$df = \dfrac{\partial f}{\partial u}\,du + \dfrac{\partial f}{\partial v}\,dv$ より

$$\begin{aligned} d^2 f = d(df) &= d\Big(\frac{\partial f}{\partial u}\,du + \frac{\partial f}{\partial v}\,dv\Big) \\ &= d\Big(\frac{\partial f}{\partial u}\Big) \wedge du + d\Big(\frac{\partial f}{\partial v}\Big) \wedge dv \\ &= \Big(-\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\Big)\,du \wedge dv = 0 \end{aligned}$$

を得る．よって命題が成り立つ．∎

定理 6.5 (Poincaré の補題)

$$D = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid a_1 \leq u \leq a_2,\ b_1 \leq v \leq b_2\}$$

を uv-平面 $\mathbf{R}^2$ 内の領域とする．

(1)　1 次微分形式 $\varphi = f du + g dv$ が領域 D で連続微分可能で $d\varphi = 0$ を満たすならば，D で定義された関数 h が存在して $\varphi = dh$ となる．

(2)　2 次微分形式 $\psi = f du \wedge dv$ が D で連続微分可能であるならば，D で定義された 1 次微分形式 φ が存在して $\psi = d\varphi$ が成り立つ．

証明　(1)　$\varphi = f du + g dv$ と $d\varphi = \Big(-\dfrac{\partial f}{\partial v} + \dfrac{\partial g}{\partial u}\Big)\,du \wedge dv = 0$ より

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial u}$$

が成り立つ．よって関数 $h = h(u, v)$ を

$$h = \int_{a_1}^{u} f(t, v)dt + \int_{b_1}^{v} g(a_1, t)dt$$

と定義すると，

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial v} &= \int_{a_1}^{u} \frac{\partial f(t, v)}{\partial v}\,dt + g(a_1, v) \\ &= \int_{a_1}^{u} \frac{\partial g(t, v)}{\partial t}\,dt + g(a_1, v) = g(u, v) \end{aligned}$$

および

$$\frac{\partial h}{\partial u} = f(u, v)$$

が成り立つから $dh = \varphi$ を得る．

(2)　関数 $h = h(u, v)$ を $h(u, v) = \int_{a_1}^{u} f(t, v)dt$ で定義すると，$\varphi = hdv$ は

$$d\varphi = dh \wedge dv = f du \wedge dv = \psi$$

を満たす． ∎

6.1.2　外微分形式による Gauss 曲率の表示

曲面 S の正則表示 $\mathbf{x} : D \to \mathbf{R}^3$ に対して

$$\mathbf{x}(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$$

と書くと

$$d\mathbf{x} = (dx_1(u, v), dx_2(u, v), dx_3(u, v)) = \mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv$$

となる．接平面内のベクトル $\mathbf{e}_1$ と $\mathbf{e}_2$ を

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle = 1, \qquad \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = 0$$

となるように選ぶ．$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}\}$ を曲面 S 上の**正規直交標構**という．実際に

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{x}_u}{\|\mathbf{x}_u\|}, \qquad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{x}_v - \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1}{\|\mathbf{x}_v - \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1\|}$$

とおけばよい．

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ は接平面の基底であるから，

$$\mathbf{x}_u = a_1\mathbf{e}_1 + b_1\mathbf{e}_2, \qquad \mathbf{x}_v = a_2\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 \tag{6.1.1}$$

と書ける．よって，

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv = (a_1 du + a_2 dv)\,\mathbf{e}_1 + (b_1 du + b_2 dv)\,\mathbf{e}_2$$

となる．

$$\theta_1 = a_1 du + a_2 dv, \qquad \theta_2 = b_1 du + b_2 dv \tag{6.1.2}$$

とおくと

$$d\mathbf{x} = \theta_1\mathbf{e}_1 + \theta_2\mathbf{e}_2 \tag{6.1.3}$$

である．従って，第1基本形式 ds^2 は次のように書ける．

$$ds^2 = \langle d\mathbf{x},\, d\mathbf{x}\rangle = \langle \theta_1\mathbf{e}_1 + \theta_2\mathbf{e}_2,\, \theta_1\mathbf{e}_1 + \theta_2\mathbf{e}_2\rangle = \theta_1^2 + \theta_2^2.$$

$d\mathbf{e}_1, d\mathbf{e}_2, d\mathbf{e}_3$ を $\mathbf{R}^3$ の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ の1次結合として

$$\begin{cases} d\mathbf{e}_1 = \omega_{11}\mathbf{e}_1 + \omega_{12}\mathbf{e}_2 + \omega_{13}\mathbf{e}_3, \\ d\mathbf{e}_2 = \omega_{21}\mathbf{e}_1 + \omega_{22}\mathbf{e}_2 + \omega_{23}\mathbf{e}_3, \\ d\mathbf{e}_3 = \omega_{31}\mathbf{e}_1 + \omega_{32}\mathbf{e}_2 + \omega_{33}\mathbf{e}_3 \end{cases} \tag{6.1.4}$$

と表わす．$\langle \mathbf{e}_i,\, \mathbf{e}_j\rangle = \delta_{ij}$ を外微分して

$$\langle d\mathbf{e}_i,\, \mathbf{e}_j\rangle + \langle \mathbf{e}_i,\, d\mathbf{e}_j\rangle = 0 \qquad (i,\, j = 1,\, 2,\, 3)$$

を得る．よって，

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0 \qquad (i,\, j = 1,\, 2,\, 3) \tag{6.1.5}$$

が成り立つ．特に $\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = 0$ となる．

外微分 d の性質より，$dd\mathbf{x} = (ddx_1(u,\, v),\, ddx_2(u,\, v),\, ddx_3(u,\, v)) = \mathbf{0}$ だから，

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= d\theta_1\mathbf{e}_1 - \theta_1 \wedge d\mathbf{e}_1 + d\theta_2\mathbf{e}_2 - \theta_2 \wedge d\mathbf{e}_2 \\ &= d\theta_1\mathbf{e}_1 - \theta_1 \wedge \sum_{j=1}^{3}\omega_{1j}\mathbf{e}_j + d\theta_2\mathbf{e}_2 - \theta_2 \wedge \sum_{j=1}^{3}\omega_{2j}\mathbf{e}_j \\ &= \Bigl(d\theta_1 - \sum_{j=1}^{2}\theta_j \wedge \omega_{j1}\Bigr)\mathbf{e}_1 + \Bigl(d\theta_2 - \sum_{j=1}^{2}\theta_j \wedge \omega_{j2}\Bigr)\mathbf{e}_2 - \sum_{j=1}^{2}\theta_j \wedge \omega_{j3}\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ が1次独立で，$\omega_{11} = \omega_{22} = 0$ だから

$$d\theta_1 - \theta_2 \wedge \omega_{21} = 0, \qquad d\theta_2 - \theta_1 \wedge \omega_{12} = 0, \tag{6.1.6}$$

$$\sum_{j=1}^{2}\theta_j \wedge \omega_{j3} = 0 \tag{6.1.7}$$

となる．(6.1.6) を**第1構造式**と呼ぶ．

第2基本形式 II はその定義 4.7 により

$$II = -\langle d\mathbf{x},\, d\mathbf{e}_3\rangle$$

となる．従って，(6.1.3) と (6.1.4) より

$$II = -\langle d\mathbf{x},\, d\mathbf{e}_3\rangle = -\langle \theta_1\mathbf{e}_1 + \theta_2\mathbf{e}_2,\, \omega_{31}\mathbf{e}_1 + \omega_{32}\mathbf{e}_2\rangle$$

$$= -\theta_1\omega_{31} - \theta_2\omega_{32} = \theta_1\omega_{13} + \theta_2\omega_{23}.$$

ω_{13}, ω_{23} が 1 次微分形式だから，それは θ_1, θ_2 の 1 次結合で表せる．よって，

$$\omega_{13} = b_{11}\theta_1 + b_{12}\theta_2, \qquad \omega_{23} = b_{21}\theta_1 + b_{22}\theta_2 \tag{6.1.8}$$

となる．(6.1.7) より，$b_{12} = b_{21}$ が成り立つ．従って，第 2 基本形式は

$$II = \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij}\theta_i\theta_j \tag{6.1.9}$$

となる．

命題 6.6 曲面の Gauss 曲率 K と平均曲率 H は次のように表せる．

$$K = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}, \qquad H = \frac{1}{2}(b_{11} + b_{22}). \tag{6.1.10}$$

証明 (6.1.2), (6.1.8) より

$$\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}du\\ dv\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}\omega_{13}\\ \omega_{23}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix} \tag{6.1.11}$$

となる．$d\mathbf{e}_3 = d\mathbf{e} = \mathbf{e}_u du + \mathbf{e}_v dv$，(6.1.1)，(6.1.4) を用いて，

$$\begin{aligned} h_{11}du + h_{12}dv &= -\langle d\mathbf{e}_3, \mathbf{x}_u\rangle = -\langle \omega_{31}\mathbf{e}_1 + \omega_{32}\mathbf{e}_2, a_1\mathbf{e}_1 + b_1\mathbf{e}_2\rangle \\ &= \omega_{13}a_1 + \omega_{23}b_1, \\ h_{12}du + h_{22}dv &= -\langle d\mathbf{e}_3, \mathbf{x}_v\rangle = -\langle \omega_{31}\mathbf{e}_1 + \omega_{32}\mathbf{e}_2, a_2\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2\rangle \\ &= \omega_{13}a_2 + \omega_{23}b_2 \end{aligned}$$

が成り立つ．従って

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix}h_{11} & h_{12}\\ h_{21} & h_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}du\\ dv\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_{13}\\ \omega_{23}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}du\\ dv\end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる．故に

$$\begin{pmatrix}h_{11} & h_{12}\\ h_{21} & h_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{pmatrix} \tag{6.1.12}$$

が成り立つ．つまり，行列 A, B, C を

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$$

とおくと

$$C = A^t B A \tag{6.1.13}$$

となる．$g_{11} = \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1$, $g_{12} = \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2$, $g_{22} = \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2$ だから，(6.1.1) より

$$A^t A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \tag{6.1.14}$$

を得る．よって，

$$(A^t A)^{-1} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{pmatrix}$$

となる．(6.1.13) より

$$B = (A^t)^{-1} C A^{-1} = A A^{-1} (A^t)^{-1} C A^{-1} = A (A^t A)^{-1} C A^{-1}$$

だから，

$$\begin{aligned} & b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} \\ &\qquad = \det B = (\det(A^t A))^{-1} \det C = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}} = K, \\ & b_{11} + b_{22} = \mathrm{trace} B = \mathrm{trace}((A^t A)^{-1} C) \\ &\qquad = \mathrm{trace}\left(\frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \right) \\ &\qquad = \frac{g_{11}h_{22} - 2g_{12}h_{12} + g_{22}h_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}} = 2H \end{aligned}$$

を得る． ∎

定理 6.7

(i)　曲面の Gauss 曲率 K **は第 2 構造式**

$$d\omega_{21} = K\theta_1 \wedge \theta_2 \tag{6.1.15}$$

を満たす．

(ii)　$\displaystyle\sum_{j=1}^{2} b_{ik,j}\theta_j = db_{ik} - \sum_{j=1}^{2} b_{ij}\omega_{kj} - \sum_{j=1}^{2} b_{kj}\omega_{ij}$ で $b_{ik,j}$ を定義すると，$b_{ik,j}$ は

$$b_{ik,\,j} = b_{ij,\,k} \qquad (i,\,j,\,k = 1,\,2) \tag{6.1.16}$$

を満たす．(6.1.16) も **Codazzi の方程式**と呼ぶ．

証明　$dd\mathbf{e}_i = \mathbf{0}$ だから

$$\begin{aligned}\mathbf{0} = d(d\mathbf{e}_i) &= d\Bigl(\sum_{j=1}^{3} \omega_{ij}\mathbf{e}_j\Bigr) \\ &= \sum_{j=1}^{3} d\omega_{ij}\mathbf{e}_j - \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} \wedge d\mathbf{e}_j \\ &= \sum_{j=1}^{3}\Bigl(d\omega_{ij} - \sum_{k=1}^{3} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}\Bigr)\mathbf{e}_j\end{aligned}$$

を得る．$\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ が 1 次独立だから

$$d\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} \qquad (i,\,j = 1,\,2) \tag{6.1.17}$$

となる．従って，(6.1.8) より

$$\begin{aligned}d\omega_{21} &= \sum_{k=1}^{3} \omega_{2k} \wedge \omega_{k1} = \omega_{23} \wedge \omega_{31} \\ &= (b_{21}\theta_1 + b_{22}\theta_2) \wedge (-b_{11}\theta_1 - b_{12}\theta_2) \\ &= (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})\theta_1 \wedge \theta_2\end{aligned}$$

となる．故に命題 6.6 より

$$d\omega_{21} = K\theta_1 \wedge \theta_2$$

が成り立つ．$\omega_{33} = 0$ より

$$d\omega_{i3} = \sum_{k=1}^{3} \omega_{ik} \wedge \omega_{k3} = \sum_{k=1}^{2} \omega_{ik} \wedge \omega_{k3} \qquad (i = 1,\,2)$$

と書ける．(6.1.8) より，$\omega_{i3} = b_{i1}\theta_1 + b_{i2}\theta_2\ (i = 1,\,2)$ だから，

$$d\Bigl(\sum_{j=1}^{2} b_{ij}\theta_j\Bigr) = \sum_{k=1}^{2} \omega_{ik} \wedge \sum_{j=1}^{2} b_{kj}\theta_j = \sum_{j,k=1}^{2} b_{kj}\omega_{ik} \wedge \theta_j \tag{6.1.18}$$

である．一方，$\omega_{i3} = b_{i1}\theta_1 + b_{i2}\theta_2\ (i = 1,\,2)$ を微分して

$$d\Bigl(\sum_{j=1}^{2} b_{ij}\theta_j\Bigr) = \sum_{j=1}^{2} db_{ij} \wedge \theta_j + \sum_{j=1}^{2} b_{ij}d\theta_j$$

$$= \sum_{j=1}^{2} db_{ij} \wedge \theta_j - \sum_{j=1}^{2} b_{ij} \sum_{k=1}^{2} \omega_{kj} \wedge \theta_k$$
$$= \sum_{j=1}^{2} \Big(db_{ij} - \sum_{k=1}^{2} b_{ik}\omega_{jk} \Big) \wedge \theta_j$$

だから，(6.1.18) より

$$\sum_{j=1}^{2} \Big(db_{ij} - \sum_{k=1}^{2} b_{ik}\omega_{jk} - \sum_{k=1}^{2} b_{kj}\omega_{ik} \Big) \wedge \theta_j = 0$$

となる．$b_{ik,j}$ の定義より

$$\sum_{j,k=1}^{2} b_{ij,k}\theta_k \wedge \theta_j = 0$$

が成り立つ．従って

$$b_{ik,j} = b_{ij,k}$$

となる．∎

曲面の正則表示と微分形式の関係を調べよう．曲面 S の正則表示 $\mathbf{x} : D \to \mathbf{R}^3$ に対して，曲面上の曲線 $\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(u(s), v(s))$ を考える．ここで s は弧長パラメータである．よって，この曲線の接ベクトル $\mathbf{x}'(s)$ は単位ベクトルである．$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ が正規直交接ベクトルであるから

$$\mathbf{x}'(s) = \xi(s)\,\mathbf{e}_1 + \eta(s)\,\mathbf{e}_2$$

と書ける．従って (6.1.4) より

$$\mathbf{x}''(s)ds = d\mathbf{x}'(s) = d\xi(s)\,\mathbf{e}_1 + \xi(s)\,d\mathbf{e}_1 + d\eta(s)\,\mathbf{e}_2 + \eta(s)\,d\mathbf{e}_2$$
$$= d\xi(s)\,\mathbf{e}_1 + \xi(s)\sum_{j=1}^{3}\omega_{1j}\mathbf{e}_j + d\eta(s)\,\mathbf{e}_2 + \eta(s)\sum_{j=1}^{3}\omega_{2j}\mathbf{e}_j$$
$$= (d\xi(s) + \eta(s)\omega_{21})\,\mathbf{e}_1 + (d\eta(s) + \xi(s)\omega_{12})\,\mathbf{e}_2 + (\xi(s)\omega_{13} + \eta(s)\omega_{23})\,\mathbf{e}_3$$

を得る．第 4 章で解説したように測地的ベクトル $\mathbf{k}_g$ と法曲率ベクトル $\mathbf{k}_n$(定義 4.13) の関係は

$$\mathbf{x}''(s) = \mathbf{k}_g + \mathbf{k}_n$$

であるから，次が成り立つ．

命題 6.8　$\mathbf{x} : D \to \mathbf{R}^3$ を曲面 S の正則表示とする．曲面 S 上の曲線 $\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(u(s), v(s))$ の測地的ベクトル $\mathbf{k}_g$ および法曲率ベクトル $\mathbf{k}_n$ は次のように表せる．

$$\mathbf{k}_g ds = (d\xi(s) + \eta(s)\omega_{21})\,\mathbf{e}_1 + (d\eta(s) + \xi(s)\omega_{12})\,\mathbf{e}_2,$$
$$\mathbf{k}_n ds = (\xi(s)\omega_{13} + \eta(s)\omega_{23})\,\mathbf{e}_3.$$

6.2　Stokes の公式

この節で，Stokes の公式を証明する．この公式はあとで使う．

D を uv-平面内の領域とし，$\varphi = f du + g dv$ を領域 D で定義された 1 次微分形式とする．D 内の曲線 C：$u = u(t)$, $v = v(t)$ $(a \leq t \leq b)$ に沿う線積分により，C に沿う 1 次微分形式 φ の積分を

$$\int_C \varphi = \int_a^b \left(f\frac{du}{dt} + g\frac{dv}{dt} \right) dt$$

と定義する．

領域 D で定義された 2 次微分形式 $\psi = f du \wedge dv$ が与えられるとき，領域 D に含まれる領域 A 上での ψ の積分を次のように定義する．

$$\int_A \psi = \iint_A f du\, dv.$$

定理 6.9 (Stokes の公式)　A を D に含まれる領域とし，その境界 ∂A が区分的に滑らかな曲線であるとする．このとき 1 次微分形式 φ に対して

$$\int_A d\varphi = \int_{\partial A} \varphi$$

が成り立つ．

証明　1 次微分形式 $\varphi = f du + g dv$ を外微分して

$$d\varphi = \left(\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} \right) du \wedge dv$$

を得る．

ケース 1.　$A = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq a,\ 0 \leq v \leq b\}$ の場合．

A の境界 ∂A は $(u(t), v(t)) = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ である．ただし，

$$C_1 \colon (t, 0) \qquad (0 \leq t \leq a),$$

$$
\begin{aligned}
&C_2\colon (a,\, t-a) \qquad (a \le t \le a+b),\\
&C_3\colon (2a+b-t,\, b) \qquad (a+b \le t \le 2a+b),\\
&C_4\colon (0,\, 2a+2b-t) \qquad (2a+b \le t \le 2a+2b)
\end{aligned}
$$

である．このとき 1 次微分形式 φ の外微分 $d\varphi = \left(\dfrac{\partial g}{\partial u} - \dfrac{\partial f}{\partial v}\right) du \wedge dv$ の長方形で囲まれた領域 A 上の積分は

$$
\begin{aligned}
&\iint_A d\varphi(u,\, v)\\
&= \iint_A \left(\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}\right) du\, dv\\
&= \int_0^b \left(\int_0^a \frac{\partial g}{\partial u} du\right) dv - \int_0^a \left(\int_0^b \frac{\partial f}{\partial v} dv\right) du\\
&= \int_0^b (g(a,\, v) - g(0,\, v)) dv - \int_0^a (f(u,\, b) - f(u,\, 0)) du\\
&= \int_0^a f(u,\, 0) du + \int_0^b g(a,\, v) dv + \int_a^0 f(u,\, b) du + \int_b^0 g(0,\, v) dv\\
&= \int_0^a \{f(t,\, 0) \times 1 + g(t,\, 0) \times 0\} dt\\
&\quad + \int_a^{a+b} \{f(a,\, t-a) \times 0 + g(a,\, t-a) \times 1\} dt\\
&\quad + \int_{a+b}^{2a+b} \{f(2a+b-t,\, b) \times (-1) + g(2a+b-t,\, b) \times 0\} dt\\
&\quad + \int_{2a+b}^{2a+2b} \{f(0,\, 2a+2b-t) \times 0 + g(0,\, 2a+2b-t) \times (-1)\} dt\\
&= \int_{\partial A} \varphi
\end{aligned}
$$

である．

ケース 2. uv-平面内の領域 A が xy-平面内の長方形で囲まれた領域 B と微分同相である場合．

領域 A が xy-平面内の長方形で囲まれた領域 B と微分同相だから，微分同相 $F : A \to B$ を

$$
u = u(x,\, y), \qquad v = v(x,\, y)
$$

で与えると，その Jacobi 行列式は $\dfrac{\partial(u,\, v)}{\partial(x,\, y)} > 0$ と仮定してもよい．このとき，微分積分学の公式より，

$$\iint_A f(u,\, v)du\, dv = \iint_B f(u(x,\, y),\, v(x,\, y))\frac{\partial(u,\, v)}{\partial(x,\, y)}\, dx\, dy \tag{6.2.1}$$

が成り立つ．$\varphi = f(u,\, v)du + g(u,\, v)dv$ を領域 A 上の 1 次微分形式とする．微分同相 F により B 上の 1 次微分形式 $F^*\varphi$ は次のように書ける．

$$F^*\varphi = \left(f\frac{\partial u}{\partial x} + g\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(f\frac{\partial u}{\partial y} + g\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy. \tag{6.2.2}$$

ただし，$f = f(u(x,\, y),\, v(x,\, y))$, $g = g(u(x,\, y),\, v(x,\, y))$ である．$F^*\varphi$ を外微分すると

$$d(F^*\varphi) = \left\{-\frac{\partial\left(f\dfrac{\partial u}{\partial x} + g\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(f\dfrac{\partial u}{\partial y} + g\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)}{\partial x}\right\}dx \wedge dy$$

を得る．

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial y}$$

および

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial y}$$

より

$$\begin{aligned}&-\frac{\partial\left(f\dfrac{\partial u}{\partial x} + g\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(f\dfrac{\partial u}{\partial y} + g\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)}{\partial x} \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)\end{aligned}$$

が成り立つ．従って

$$d(F^*\varphi) = \left(\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx \wedge dy \tag{6.2.3}$$

となる．一方，φ を外微分すると

$$d\varphi = \left(\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}\right)du \wedge dv$$

になるから，微分同相 F より B 上の 2 次微分形式 $F^*d\varphi$ は次のように書ける．

$$F^*d\varphi = \Big(\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}\Big)\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\Big)dx \wedge dy. \tag{6.2.4}$$

故に

$$d(F^*\varphi) = F^*d\varphi \tag{6.2.5}$$

が成り立つ．よって，

$$\int_B F^*d\varphi = \int_B d(F^*\varphi)$$

となる．(6.2.1) と上の式およびケース 1 から，以下を得る：

$$\int_A d\varphi = \int_B F^*d\varphi = \int_B d(F^*\varphi) = \int_{\partial B} F^*\varphi = \int_{\partial A} \varphi.$$

ケース 3. uv-平面内の領域 A が一般の場合.

A の境界 ∂A が区分的に微分可能な曲線であるから，領域 A が有限個の部分領域 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ に分割され，各部分領域 A_j はある長方形領域 B_j と微分同相である．従って，ケース 2 により

$$\int_A d\varphi = \sum_{j=1}^m \int_{A_j} d\varphi = \sum_{j=1}^m \int_{\partial A_j} \varphi$$

が成り立つ．A_j らの隣りあった領域の共通の境界に沿って積分するとき 2 回となり，その 1 回は逆向きである．こうして φ の A_j らの隣りあった領域の共通の境界に沿って φ の積分は互いに消しあうので，最後に残るのは A の境界に沿った積分のみである．故に

$$\sum_{j=1}^m \int_{\partial A_j} \varphi = \int_{\partial A} \varphi$$

となる．よって，Stokes の公式を得る．　∎

6.3　領域上の Gauss-Bonnet の定理

この節で Gauss-Bonnet の定理について述べる．この定理は曲面の大域的微分幾何学で代表的な定理である．

I. まず簡単な場合，つまり $\mathbf{x} : D \to \mathbf{R}^3$ を曲面 S の正則表示とし，$A \subset D$ が滑らかな閉曲線 C で囲まれる単連結な領域である場合を考える．このとき，

次の定理が成立する．

定理 6.10　$\mathbf{x}: D \to \mathbf{R}^3$ を曲面 S の正則表示とし，$A \subset D$ を滑らかな閉曲線 $\mathcal{C}$ で囲まれる単連結な領域とする．このとき

$$\iint_{\mathbf{x}(A)} K dS = 2\pi - \int_{\mathbf{x}(\mathcal{C})} \kappa_g ds$$

が成り立つ．ただし，κ_g は D の向きに従って定まる曲線 $\mathbf{x}(\mathcal{C})$ の測地的曲率で，s は D の向きに同調するように向き付けられた曲線 $\mathbf{x}(\mathcal{C})$ の弧長パラメータである．

証明　$\mathbf{x}: D \to \mathbf{R}^3$ を曲面 S の正則表示とし，$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ を曲面 S の正規直交な接ベクトル場とする．このとき，$\mathbf{x}$ の外微分 $d\mathbf{x}$ は

$$d\mathbf{x} = \theta_1 \mathbf{e}_1 + \theta_2 \mathbf{e}_2$$

となる．ただし θ_1, θ_2 は 1 次微分形式である．s を曲線 $\alpha = \mathbf{x}(\mathcal{C})$ の弧長パラメータとして，s で微分し

$$\mathbf{x}'(s) = \cos\phi(s)\,\mathbf{e}_1 + \sin\phi(s)\,\mathbf{e}_2$$

を得る．ここで，ϕ は $\mathbf{e}_1$ から $\mathbf{x}'(s)$ への角度である．

$$\mathbf{a}(s) = -\sin\phi(s)\,\mathbf{e}_1 + \cos\phi(s)\,\mathbf{e}_2$$

とおくと $\mathbf{a}(s)$ は $\mathbf{x}'(s)$ と直交する単位ベクトルである．命題 6.8 より，測地的曲率ベクトル $\mathbf{k}_g$ は

$$\mathbf{k}_g ds = \{-\sin\phi(s)\,d\phi + \omega_{21}\sin\phi(s)\}\,\mathbf{e}_1 + \{\cos\phi(s)\,d\phi + \omega_{12}\cos\phi(s)\}\,\mathbf{e}_2$$

となる．従って

$$\mathbf{k}_g ds = (d\phi - \omega_{21})\,\mathbf{a}(s)$$

が成り立つ．故に，測地的曲率 $\kappa_g = \|\mathbf{k}_g\|$ は

$$\kappa_g ds = d\phi - \omega_{21}$$

を満たす．従って $\mathcal{C}$ 上の測地的曲率 κ_g の積分値は

$$\int_{\mathbf{x}(\mathcal{C})} \kappa_g ds = \int_{\mathbf{x}(\mathcal{C})} d\phi - \int_{\mathbf{x}(\mathcal{C})} \omega_{21} \tag{6.3.1}$$

となる．第 2 構造式

$$d\omega_{21} = K\theta_1 \wedge \theta_2 \tag{6.3.2}$$

に Stokes の公式を適用すると

$$\int_{\mathbf{x}(\mathcal{C})} \omega_{21} = \iint_{\mathbf{x}(A)} K\theta_1 \wedge \theta_2 = \iint_{\mathbf{x}(A)} KdS$$

となる．更に曲線 $\mathcal{C}$ が滑らかな閉曲線だから

$$\int_{\mathbf{x}(\mathcal{C})} d\phi = 2\pi \tag{6.3.3}$$

を得る．こうして

$$\iint_{\mathbf{x}(A)} KdS = 2\pi - \int_{\mathbf{x}(\mathcal{C})} \kappa_g ds$$

を得る． ∎

II. 一般的な場合を考える．つまり，$\mathbf{x} : D \to \mathbf{R}^3$ を曲面 S の正則表示とし，$A \subset D$ が区分的に滑らかな閉曲線 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \cdots + \mathcal{C}_m$ で囲まれる単連結な領域である場合を考える．このとき，

定理 6.11 (領域上の Gauss-Bonnet の定理)　$\mathbf{x} : D \to \mathbf{R}^3$ を曲面 S の正則表示とし，$A \subset D$ を区分的に滑らかな閉曲線 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \cdots + \mathcal{C}_m$ で囲まれる単連結な領域とする．このとき

$$\iint_{\mathbf{x}(A)} KdS + \int_{\mathbf{x}(\mathcal{C})} \kappa_g ds = 2\pi - \sum_{j=1}^{m} (\pi - \phi_j)$$

が成り立つ．ただし，κ_g は D の向きに従って定まる曲線 $\mathbf{x}(\mathcal{C})$ の測地的曲率で，s は D の向きに同調するように向き付けられた曲線 $\mathbf{x}(\mathcal{C})$ の弧長パラメータであり，ϕ_j は $\mathbf{x}(\mathcal{C})_j$ と $\mathbf{x}(\mathcal{C})_{j+1}$ の接合点における隣接 2 曲線のなす内角である．ただし $\mathbf{x}(\mathcal{C})_{m+1} = \mathbf{x}(\mathcal{C})_1$ を意味する．

証明　各曲線 $\mathcal{C}_j$ に対して，定理 6.10 の証明中の式

$$\int_{\mathbf{x}(\mathcal{C}_j)} \kappa_g ds = \int_{\mathbf{x}(\mathcal{C}_j)} d\phi - \int_{\mathbf{x}(\mathcal{C}_j)} \omega_{21}$$

が成り立つ．全ての j に関して和をとると

$$\sum_{j=1}^{m} \int_{\mathbf{x}(\mathcal{C}_j)} \kappa_g ds = \sum_{j=1}^{m} \int_{\mathbf{x}(\mathcal{C}_j)} d\phi - \sum_{j=1}^{m} \int_{\mathbf{x}(\mathcal{C}_j)} \omega_{21}, \tag{6.3.4}$$

つまり，

$$\int_{\mathbf{x}(\mathcal{C})} \kappa_g ds = \sum_{j=1}^{m} \int_{\mathbf{x}(\mathcal{C}_j)} d\phi - \int_{\mathbf{x}(\mathcal{C})} \omega_{21} \tag{6.3.5}$$

が成り立つ．第 2 構造式

$$d\omega_{21} = K\theta_1 \wedge \theta_2$$

に Stokes の公式を適用すると

$$\int_{\mathbf{x}(\mathcal{C})} \omega_{21} = \iint_{\mathbf{x}(A)} K\theta_1 \wedge \theta_2 = \iint_{\mathbf{x}(A)} KdS$$

が成り立つ．よって (6.3.5) と合わせて，

$$\iint_{\mathbf{x}(A)} KdS = \sum_{j=1}^{m} \int_{\mathbf{x}(\mathcal{C})_j} d\phi - \int_{\mathbf{x}(\mathcal{C})} \kappa_g ds \tag{6.3.6}$$

を得る．

(1) 曲線 $\mathcal{C}$ が滑らかな閉曲線のとき，$\displaystyle\int_{\mathbf{x}(\mathcal{C})} d\phi = 2\pi$ である．

(2) 曲線 $\mathcal{C}$ が 1 点 (u_0, v_o) 以外で滑らかな閉曲線の場合，明らかに

$$\int_{\mathbf{x}(\mathcal{C})} d\phi = 2\pi - (\pi - \phi_1)$$

である．

(3) 一般の場合，

$$\sum_{j=1}^{m} \int_{\mathbf{x}(\mathcal{C})_j} d\phi = 2\pi - \sum_{j=1}^{m} (\pi - \phi_j)$$

となることが解る．故に

$$\iint_{\mathbf{x}(A)} KdS + \int_{\mathbf{x}(\mathcal{C})} \kappa_g ds = 2\pi - \sum_{j=1}^{m} (\pi - \phi_j)$$

を得る． ∎

曲面上の 3 つの測地線分が円板領域の境界となっているとき，3 つの測地線分を測地三角形，測地線分の端点を測地三角形の頂点という．

問 6. 12 Euclid 平面上の測地三角形 A の内角の和は π であることを示せ．

問 6. 13 半径 1 の球面上の測地三角形 A の内角の和は π より大きいことを証明せよ．

問 6. 14 球面上で内角の和が $\dfrac{3}{2}\pi$ の測地三角形の例を挙げよ．

問 6. 15 Euclid 平面には測地二角形は存在しない．その理由を述べよ．

問 6. 16 一葉双曲面の正則表示 $\mathbf{x} : D \to \mathbf{R}^3$, $D = \mathbf{R} \times (0, 2\pi)$ を

$$\mathbf{x}(u,\, v) = (\cosh u \cos v,\, \cosh u \sin v,\, \sinh u) \qquad ((u,\, v) \in D)$$

とする．

(i)　一葉双曲面の第 1 基本形式を $ds^2 = \theta_1^2 + \theta_2^2$ の形で表示せよ．

(ii)　一葉双曲面の第 1 構造方程式 $d\theta_1 = \theta_2 \wedge \omega_{21}$, $d\theta_2 = \theta_1 \wedge \omega_{12}$，第 2 構造方程式 $d\omega_{21} = K(u,\, v)\theta_1 \wedge \theta_2$ を決定せよ．

(iii)　一葉双曲面上の測地三角形の内角の和が π より小さいことを確認せよ．

問 6.17　回転トーラス $T^2(a,\, b)$ の正則表示 $\mathbf{x} : D \to \mathbf{R}^3$, $D = (-\pi,\, \pi) \times (0,\, 2\pi)$ を公式 (4.1.1) で与える．このとき，

(i)　$T^2(a,\, b)$ の第 1 基本形式を $ds^2 = \theta_1^2 + \theta_2^2$ の形で表示せよ．

(ii)　$T^2(a,\, b)$ の第 1 構造方程式 $d\theta_1 = \theta_2 \wedge \omega_{21}$, $d\theta_2 = \theta_1 \wedge \omega_{12}$，第 2 構造方程式 $d\omega_{21} = K(u,\, v)\theta_1 \wedge \theta_2$ を決定せよ．

(iii)　(1)　$T^2(a,\, b)$ 上の内側部分 $u \in \left(-\pi,\, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2},\, \pi\right)$ に含まれる測地三角形の内角の和が π より小さいことを証明せよ．

(2)　$T^2(a,\, b)$ 上の外側部分 $u \in \left(-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}\right)$ に含まれる測地三角形の内角の和は π より大きいことを証明せよ．

(3)　$T^2(a,\, b)$ 上の測地三角形の内角の和が π になることもあり得ることを例示せよ．

問 6.18　常螺旋面の正則表示 $\mathbf{x} : D \to \mathbf{R}^3$, $D = \mathbf{R} \times (0,\, 2\pi)$ を

$$\mathbf{x}(u,\, v) = (u \cos v,\, u \sin v,\, v + 1) \qquad ((u,\, v) \in D)$$

とする．

(i)　常螺旋面の第 1 基本形式を $ds^2 = \theta_1^2 + \theta_2^2$ の形で表示せよ．

(ii)　常螺旋面の第 1 構造方程式 $d\theta_1 = \theta_2 \wedge \omega_{21}$, $d\theta_2 = \theta_1 \wedge \omega_{12}$，第 2 構造方程式 $d\omega_{21} = K(u,\, v)\theta_1 \wedge \theta_2$ を決定せよ．

問 6.19　Enneper 曲面の正則表示 $\mathbf{x} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ を

$$\begin{aligned}&\mathbf{x}(u,\, v)\\ &\quad = (3u + 3uv^2 - u^3,\, v^3 - 3v - 3u^2 v,\, 3(u^2 - v^2)) \qquad ((u,\, v) \in \mathbf{R}^2)\end{aligned}$$

とする．

(i)　Enneper 曲面の第 1 基本形式を $ds^2 = \theta_1^2 + \theta_2^2$ の形で表示せよ．

(ii)　Enneper 曲面の第 1 構造方程式 $d\theta_1 = \theta_2 \wedge \omega_{21}$, $d\theta_2 = \theta_1 \wedge \omega_{12}$，第 2 構造方程式 $d\omega_{21} = K(u,\, v)\theta_1 \wedge \theta_2$ を決定せよ．

6.4 閉曲面上の Gauss-Bonnet の定理

曲面の1つの正則表示に含まれる単連結な領域に関する Gauss-Bonnet の定理を前節で示した．これからは空間内の閉じている曲面 (たとえば，球面や回転トーラスなどのようにコンパクトで境界を持たない曲面) S を対象にする．そのような曲面上で Gauss-Bonnet の定理を証明する．そのために，まず必要な準備をする．

曲面 S の三角形分割について簡単に説明する．

S 上の異なる3点 A, B, C を結ぶ S 内の3曲線が円板領域を囲むとき，この図形を S 上の**三角形** $\triangle ABC$ といい，点 A, B, C を三角形 $\triangle ABC$ の**頂点**，点 A, B, C を結ぶ3曲線を三角形 $\triangle ABC$ の**辺**，3点 A, B, C を結ぶ S 上の3曲線から囲まれる部分を三角形 $\triangle ABC$ の**面**と呼ぶ．ここで曲面 S の1つの正則表示に入らないような大きい三角形は考えない．

曲面 S の三角形分割とは，上に述べたような三角形で S を敷き詰めたもの，つまり S を三角形の和集合に表したものである．今後の説明がスムースにいくように，次の性質を満たすような三角形分割を仮定する．

(i)　S 上の1点 P が三角形 T に属し，かつその辺上になければ，T が P を含む唯一の三角形である．

(ii)　P が三角形 T の辺上にあってその頂点でなければ，P の属する辺に共有する三角形 T' が丁度もう1つあり，P は $T \cup T'$ の内部に含まれる．

(iii)　P が三角形 T の頂点ならば，P を頂点とする有限個の三角形 $T_1, T_2, \cdots,$ T_k があり，T_j と T_{j+1} はただ1つの辺を共有し，P は $T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_k$ の内部に含まれる．ここで $T_{k+1} = T_1$ を意味する．

定義 6.20　曲面 S の三角形分割の中で面の個数 (三角形の個数)，辺の個数と頂点の個数をそれぞれ F, E と V とおく．

$$\chi(S) = F - E + V$$

を **Euler 標数**とよぶ．

Euler 標数 $\chi(S)$ は三角形分割によらない．実際，三角形 $\triangle$ 内に頂点として1点を加えたとき [Figure 6.4]，三角形の数，辺の数および頂点の数がそれぞれ2つ，3つ，1つと増える．しかし，Euler 標数 $\chi(S) = F - E + V$ は変らない．三

角形 $\triangle$ の辺上に頂点として 1 点を加えたとき，三角形の数，辺の数および頂点の数がそれぞれ 1 つ，2 つ，1 つと増える．しかし，Euler 標数 $\chi(S) = F - E + V$ は変らない [Figure 6.4]．$\{\triangle_i\}$ と $\{\triangle_k\}$ を曲面の任意の 2 つの三角形分割とする．更に，$\{\triangle_i\}$ を細かく三角形分割して $\{\triangle_{i_k}\}$ としたとき，$\{\triangle_{i_k}\}$ の各々の三角形が $\{\triangle_k\}$ のある三角形に含まれるようにとる．このとき，$\{\triangle_{i_k}\}$ は $\{\triangle_k\}$ を細かく三角形分割したものになっている．従って，$\{\triangle_i\}$ の Euler 標数は $\{\triangle_{i_k}\}$ の Euler 標数に等しく，同じ理由で $\{\triangle_k\}$ の Euler 標数は $\{\triangle_{i_k}\}$ の Euler 標数に等しい．よって，$\{\triangle_i\}$ の Euler 標数は $\{\triangle_k\}$ の Euler 標数に等しい．従って，曲面の Euler 標数は三角形分割によらない．一方，この節の定理 6.25 (閉曲面上の Gauss-Bonnet の定理) より，Euler 標数 $\chi(S)$ は三角形分割によらないことも分かる．

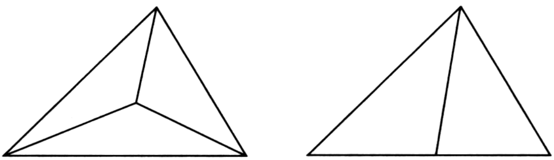


Figure 6.4　Euler 標数

閉曲面が必ず三角形分割できることは直観的には明らかである．実際には閉曲面 S はコンパクトだから，S 上の凸半径 $\delta = \delta(s) > 0$ が存在する (定義 9.28 を参照)．S 上の各点 p を中心とする半径 $\dfrac{\delta}{2}$ の開球 $B\Big(p, \dfrac{\delta}{2}\Big)$ を全て集めると S の開被覆を得る．S 上に有限個の点 $p_1, \cdots, p_k$ を選んで $S \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} B\Big(p_i, \dfrac{\delta}{2}\Big)$ となる．$B\Big(p_i, \dfrac{\delta}{2}\Big) \cap B\Big(p_j, \dfrac{\delta}{2}\Big) \neq \emptyset$ ならば，$d(p_i, p_j) < \delta$ だから，p_i と p_j は一意的に決まる最短測地線分で結べる．この関係を満たす 2 点を順次最短測地線分で結んで，S を有限個の測地三角形によって三角形分割することができる．

例 6.21　球面 S^2 の Euler 標数は 2 である．球面上に相異なる 4 点をとるとき，球面は 4 個の三角形に分割される．

$$\chi(S^2) = F - E + V = 4 - 6 + 4 = 2.$$

よって，球面 S^2 の Euler 標数は 2 である．

問 6.22　回転トーラスの Euler 標数を求めよ．

問 6.23 平面全体に「ある 1 点を付加」すれば，それは三角形分割される．この三角形分割の状況を説明せよ．

定理 6.24 Ω を曲面 S 上の相対コンパクトな領域とし，Ω の境界 $\partial\Omega$ を区分的に滑らかな閉曲線 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \cdots + \mathcal{C}_m$ とする．このとき

$$\iint_\Omega K dS + \sum_{j=1}^m \int_{\mathcal{C}_j} \kappa_g ds = 2\pi\chi(\Omega) - \sum_{j=1}^m (\pi - \phi_j)$$

が成り立つ．ただし，κ_g は S の向きに従って定まる曲線 $\mathcal{C}$ の測地的曲率で，s は S の向きに伴う曲線 $\mathcal{C}$ の弧長パラメータであり，ϕ_j は $\mathcal{C}_j$ と $\mathcal{C}_{j+1}$ の接合点における隣接 2 曲線のなす内角である．ここで $\mathcal{C}_{m+1}$ は $\mathcal{C}_1$ を意味する．

証明 S の領域 Ω に対して各三角形 T_j が S の 1 つの正則表示に含まれるような三角形分割 $\{T_j\}_{j=1}^k$ を行う．各三角形 T_j に対して Guass-Bonnet の定理が成り立つ．つまり

$$\iint_{T_j} K dS + \int_{\partial T_j} \kappa_g ds = 2\pi - \sum_{i=1}^3 (\pi - \phi_{ji})$$

が成り立つ．ここで ϕ_{ji} は各三角形 T_j の内角である．従って，

$$\iint_\Omega K dS = \sum_{j=1}^k \iint_{T_j} K dS = 2k\pi - \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^3 (\pi - \phi_{ji}) - \sum_{j=1}^k \int_{\partial T_j} \kappa_g ds$$

を得る．ただし k は三角形の個数である．

この三角形分割の中で隣接する 2 つの三角形の共有辺上の積分を考える．

測地的曲率 $\kappa_g(s)$ は辺の進行方向により正負の符号が交代することに留意せよ．実際，曲面 S 上の曲線を $\mathbf{x}(s)$ (s は弧長パラメータ) とするとき，単位接ベクトル $\mathbf{e}_1(s)$ を $\mathbf{e}_1(s) = \mathbf{x}'(s)$ とし，$\mathbf{e}_2(s)$ を $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ が曲面 S の単位法ベクトルとなるような S の単位接ベクトルにとるとき，測地的曲率は $\kappa_g(s) = \mathbf{x}''(s) \cdot \mathbf{e}_2(s)$ である．もしも，この曲線の進行方向を逆向きにとると，その単位接ベクトル $\overline{\mathbf{e}_1}(s)$ は $\overline{\mathbf{e}_1}(s) = -\mathbf{e}_1(s)$ だから，$\overline{\mathbf{e}_2}(s)$ を $\overline{\mathbf{e}_1} \times \overline{\mathbf{e}_2}$ が曲面 S の単位法ベクトルになるようにするには，$\overline{\mathbf{e}_2} = -\mathbf{e}_2$ でなければならない．よって進行方向を逆向きにとった曲線の測地的曲率は

$$\mathbf{x}''(s) \cdot \overline{\mathbf{e}_2}(s) = \mathbf{x}''(s) \cdot (-\mathbf{e}_2(s)) = -\kappa_g(s)$$

である．故に，S 上の 2 つの隣接三角形について共有する辺に沿った測地的曲率

$\kappa_g(s)$ の積分値は互いに消し合うので，$\displaystyle\sum_{j=1}^{k}\int_{\partial T_j}\kappa_g ds$ の中で Ω の境界 $\partial\Omega = \mathcal{C}$ 上の部分の積分のみが残る．従って

$$\sum_{j=1}^{k}\int_{\partial T_j}\kappa_g ds = \sum_{j=1}^{m}\int_{\mathcal{C}_j}\kappa_g ds$$

を得る．故に

$$\iint_{\Omega} K dS + \sum_{j=1}^{m}\int_{\mathcal{C}_j}\kappa_g ds = k2\pi - \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{3}(\pi - \phi_{ji}) \tag{6.4.1}$$

となる．次のことを定義する．

(i)　E_e は三角形分割の中の Ω の境界 $\mathcal{C}$ に含まれる三角形の辺の個数である．

(ii)　E_i は三角形分割の中の Ω の内部に含まれる三角形の辺の個数である．

(iii)　V_e は三角形分割の中の Ω の境界 $\mathcal{C}$ に含まれる三角形の頂点の個数である．

(iv)　V_i は三角形分割の中の Ω の内部に含まれる三角形の頂点の個数である．

従って，この三角形分割の中で三角形の頂点の個数と三角形の辺の個数はそれぞれ

$$V = V_i + V_e, \qquad E = E_i + E_e$$

となる．

Ω の境界 $\mathcal{C}$ は閉曲線であるから，$E_e = V_e$ となる．各三角形 T_j は辺が 3 で，三角形分割の中の Ω の内部に含まれる三角形の各辺がとなり合う 2 つの三角形に属するから

$$3k = 2E_i + E_e \tag{6.4.2}$$

が成り立つ．よって

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{3}(\pi - \phi_{ji}) &= 3k\pi - \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{3}\phi_{ji} \\ &= 2\pi E_i + \pi E_e - \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{3}\phi_{ji}.\end{aligned} \tag{6.4.3}$$

一方，三角形分割の中の Ω の内部に含まれる三角形の頂点はいくつかの三角形の共通頂点になっているので，それらの内角の和が 2π であることはいうまでもない．Ω の境界 $\mathcal{C}$ に属する三角形の頂点は境界 $\mathcal{C}$ の隣接 2 曲線の接合点お

よび三角形分割による発生された頂点で構成される．三角形分割で生じた新しい頂点で内角の和は π である．従って

$$V_e = m + V_{et}$$

となる．ここで V_{et} は三角形分割により発生された頂点の個数である．境界 $\mathcal{C}$ の隣接 2 曲線の接合点で内角は ϕ_j であるから

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{3}(\phi_{ji}) = 2\pi V_i + \pi V_{et} + \sum_{j=1}^{m}\phi_j \tag{6.4.4}$$

である．従って

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{3}(\pi - \phi_{ji}) &= 2\pi E_i + \pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_{et} - \sum_{j=1}^{m}\phi_j \\ &= 2\pi E_i + \pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_e + \sum_{j=1}^{m}(\pi - \phi_j) \\ &= 2\pi E - 2\pi V + \sum_{j=1}^{m}(\pi - \phi_j) \qquad (6.4.5)\end{aligned}$$

が成り立つ．(6.4.1) と (6.4.5) より

$$\begin{aligned}\iint_\Omega K dS + \sum_{j=1}^{m}\int_{\mathcal{C}_j}\kappa_g ds &= k2\pi - 2\pi E + 2\pi V - \sum_{j=1}^{m}(\pi - \phi_j) \\ &= 2\pi\chi(\Omega) - \sum_{j=1}^{m}(\pi - \varphi_j)\end{aligned}$$

を得る． ∎

定理 6.24 より，閉曲面に対して次が成り立つ．

定理 6. 25 (閉曲面上の Gauss-Bonnet の定理)　閉曲面 S に対して

$$\int_S K dS = 2\pi\chi(S)$$

が成立する．

上の定理より，次のことが成り立つ．

(i)　球面の Euler 標数は 2 である．

(ii)　Euler 標数は三角形分割の仕方に無関係に決まる数である．

(iii)　球面と同位相な閉曲面 S 上の Gauss 曲率 K の積分値は 4π である．

(iv)　閉曲面 S に1つ把手をつけて曲面になるように変形した新しい閉じている曲面の Gauss 曲率 K の積分値は，元の閉曲面に比べて 4π だけ減少する．

定義 6.26　球面に g 個把手 (ハンドル) をつけてできた曲面 (g 人乗り浮き袋) を**種数** (genus) g **の曲面**と呼ぶ．

問 6.27　種数 g の曲面 M の Euler 標数 $\chi(M)$ は

$$\chi(M) = 2(1-g)$$

であることを，三角形分割を用いて証明せよ．

問 6.28　回転トーラス上の Gauss 曲率 K の積分値は 0 であることを示せ．

注意 6.29　必ずしも向き付け可能でない2次元閉曲面 M^2(または2次元コンパクトな Riemann 多様体) に対しても Gauss-Bonnet の定理は成立する．証明の概略を以下に述べる：

(i)　M^2 を有限個の測地三角形 $\{\triangle_i\}_{i=1,\cdots,k}$ で分割する．

(ii)　各々の測地三角形 $\triangle_i$ の頂点を p_i, q_i, r_i，頂角を A_i, B_i, C_i とおくと

$$\int_{\triangle_i} KdM = A_i + B_i + C_i - \pi$$

が成り立つ．ここに，上式は $\triangle_i$ の向き付けに無関係である．

(iii)　$\displaystyle\int_M KdM = \sum_{i=1}^{k} \int_{\triangle_i} KdM$ を定理 6.24 の証明の方法に従って計算すると

$$\int_M KdM = 2\pi\chi(M)$$

を得る．

第7章　位相空間からの準備

位相数学の知識なしでは曲面や多様体の上で大域的な問題を考えることはできないだろう．完備性やコンパクト性は曲面の全体像を決定するさいの必要不可欠な条件となることが多い．位相空間の定義を慎重にすすめる．通常の位相空間の定義は開集合系を主として扱うことが多い．我々はここでは最も汎用性のある方法で位相を定義する．すなわち，3 種類の集合族と 2 種類の作用素：開集合系，開近傍系，開核作用素，閉包作用素，閉集合系を定義する．これらの概念は全て同値な概念であることを証明する．このようにして位相を定義すれば，位相の概念が自由に使いこなせるだろう．たとえば，距離空間が位相空間であることを容易に理解するだろう．

7.1　諸概念の定義

以下，つねに E を空でない集合とし，E の部分集合全体から成る集合 (いわゆるベキ集合 (power set)) を $\mathfrak{P}(E)$ で表す．E の部分集合 $S \in \mathfrak{P}(E)$ に対して，その補集合 (complement)$E \setminus S$ を S^c で表す．

定義 7.1　$\mathfrak{P}(E)$ の部分集合 $\mathcal{T} \subset \mathfrak{P}(E)$ が以下の条件 $(T0) \sim (T3)$ を満たすとき，$\mathcal{T}$ を**開集合系** (system of open sets) とよぶ：

$(T0)$　$\emptyset \in \mathcal{T}$.

$(T1)$　$U_1, U_2 \in \mathcal{T} \implies U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

$(T2)$　$\mathcal{T}$ の任意の部分集合 $\mathfrak{S} \subset \mathcal{T}$ 対して $\displaystyle\bigcup_{U \in \mathfrak{S}} U \in \mathcal{T}$.

$(T3)$　$E \in \mathcal{T}$.

定義 7.2　$\mathfrak{P}_0(E)$ を $\mathfrak{P}(E)$ の部分集合族とする．写像 $\mathcal{N} : E \to \mathfrak{P}_0(E)$ を $E \ni p \mapsto \mathcal{N}_p \subset \mathfrak{P}(E)$ とおく．この写像 $\mathcal{N}$ が以下の条件 $(N0) \sim (N4)$ を満たすとき $\mathcal{N}$ (または, 部分集合族の族 $\{\mathcal{N}_p\}_{p\in E}$) を**開近傍系** (open neighbourhood system) とよぶ：

$(N0)$　任意の点 $p \in E$ に対して $E \in \mathcal{N}_p$.

$(N1)$　$N \in \mathcal{N}_p \implies p \in N$.

$(N2)$　$N_1, N_2 \in \mathcal{N}_p$ の共通集合が空でなければ $N_3 \subset N_1 \cap N_2$ を満たす $N_3 \in \mathcal{N}_p$ が存在する．

$(N3)$　$N \in \mathcal{N}_p,\ q \in N \implies N \in \mathcal{N}_q$.

$(N4)$　E の任意の部分集合 $W \in \mathfrak{P}(E)$ および任意の $p \in W$ に対して $N_p \in \mathcal{N}_p$ が与えられたとすると，任意の $q \in W$ に対して $\bigcup_{p\in W} N_p \in \mathcal{N}_q$.

定義 7.3　写像 $\circ : \mathfrak{P}(E) \to \mathfrak{P}(E)$ を $\mathfrak{P}(E) \ni S \mapsto S^\circ \in \mathfrak{P}(E)$ とおく．写像 $\circ$ が以下の条件 $(1^\circ) \sim (5^\circ)$ を満たすとき，この写像 $\circ$ を**開核作用素** (interior kernel operator) とよぶ：

(1°)　$E^\circ = E$.

(2°)　任意の $S \in \mathfrak{P}(E)$ に対して $S^\circ \subset S$.

(3°)　$S^\circ = S^{\circ\circ} := (S^\circ)^\circ$.

(4°)　$S \subset T \in \mathfrak{P}(E) \implies S^\circ \subset T^\circ$.

(5°)　任意の $S, T \in \mathfrak{P}(E)$ に対して $(S \cap T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$.

定義 7.4　写像 $b : \mathfrak{P}(E) \to \mathfrak{P}(E)$ を $\mathfrak{P}(E) \ni S \mapsto S^b \in \mathfrak{P}(E)$ とおく．写像 b が以下の条件 $(1^b) \sim (5^b)$ を満たすとき，この写像 b を**閉包作用素** (closure operator) とよぶ：

(1^b)　$\emptyset^b = \emptyset$.

(2^b)　任意の $S \in \mathfrak{P}(E)$ に対して $S \subset S^b$.

(3^b)　$S^b = S^{bb} := (S^b)^b$.

(4^b)　$S \subset T \in \mathfrak{P}(E) \implies S^b \subset T^b$.

(5^b)　任意の $S, T \in \mathfrak{P}(E)$ に対して $(S \cap T)^b = S^b \cap T^b$.

定義 7.5　$\mathfrak{P}(E)$ の部分集合 $\mathcal{F} \subset \mathfrak{P}(E)$ が以下の条件 $(F0) \sim (F3)$ を満たすとき，$\mathcal{F}$ を**閉集合系** (system of closed sets) とよぶ：

$(F0)$　$E \in \mathcal{F}$.

$(F1)\quad F_1, F_2 \in \mathcal{F} \implies F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}.$

$(F2)$ $\mathcal{F}$ の任意の部分集合 $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ について $\displaystyle\bigcap_{F \in \mathcal{E}} F \in \mathcal{F}.$

$(F3)\quad \emptyset \in \mathcal{F}.$

7.2 概念間の同値性

上で述べた諸概念が全て同値であることを証明しよう．初めに開集合系と開近傍系の関係を示す．

補題 7.6 $\mathcal{T} \subset \mathfrak{P}(E)$ を開集合系とし，任意の $p \in E$ に対して

$$\mathcal{N}_p := \{N \in \mathcal{T} \mid p \in N\}$$

とおく．このとき $\mathcal{N} := \{\mathcal{N}_p\}_{p \in E}$ は開近傍系である．

証明 $(N0)$ は，$(T3)$ より自明．

$(N1)$ は，定義より自明．

$(N2)$ について，$N_1, N_2 \in \mathcal{N}_p$ に対して定義より $p \in N_1 \cap N_2$．また $(T1)$ より $N_1 \cap N_2 \in \mathcal{T}$．従って $N_3 := N_1 \cap N_2$ とおけば，$N_3 \in \mathcal{N}$．

$(N3)$ は $\mathcal{N}$ の作り方より自明．

最後に $(N4)$ を示す．任意の $W \in \mathfrak{P}(E)$ および任意の $p \in W$ に対して，$N_p \in \mathcal{N}_p$ が与えられたとする．定義より $N_p \in \mathcal{T}$ だから $(T2)$ より $\displaystyle\bigcup_{p \in W} N_p \in \mathcal{T}$ となる．

従って，任意の $q \in W$ について $q \in N_q \subset \displaystyle\bigcup_{p \in W} N_p$ だから，$\displaystyle\bigcup_{p \in W} N_p \in \mathcal{N}_q$．

∎

次に開近傍系と開核作用素の関係を示す．

補題 7.7 $\mathcal{N} : E \to \mathfrak{P}_0(E)$ を開近傍系とする．任意の $S \in \mathfrak{P}(E)$ に対して $S^\circ \in \mathfrak{P}(E)$ を

$$S^\circ := \{p \in S \mid N \subset S \text{ を満たす } N \in \mathcal{N}_p \text{が存在する}\}\ (\subset S)$$

とおく．このとき対応 $S \mapsto S^\circ$ は開核作用素である．

証明 作り方より (1°), (2°) は自明．特に $S^{\circ\circ} \subset S^\circ$ であることに注意する．

このとき (3°) を示す．S° の作り方より，$N \subset S$ を満たす $N \in \mathcal{N}_p$ が存在

する．また任意の $q \in N$ に対して (N3) より $N \in \mathcal{N}_q$ となるから，$q \in S^\circ$ すなわち $N \subset S^\circ$．従って $N \subset S^\circ$ を満たす $N \in \mathcal{N}_p$ が存在することが示され，$p \in S^{\circ\circ}$ すなわち $S^\circ \subset S^{\circ\circ}$ である．先の注意と合わせて $S^\circ = S^{\circ\circ}$．

次に (4°) を示す．$S \subset T \in \mathfrak{P}(E)$ とする．このとき任意の $p \in S^\circ$ に対して $N \subset S$ を満たす $N \in \mathcal{N}_p$ が存在する．よって $N \subset S \subset T$ より $p \in T^\circ$ すなわち $S^\circ \subset T^\circ$．

最後に (5°) を示す．任意の $p \in (S \cap T)^\circ$ に対して $N \subset S \cap T$ を満たす $N \in \mathcal{N}_p$ が存在し, 従って $N \subset S$ と $N \subset T$ を満たす $N \in \mathcal{N}_p$ が存在する．すなわち, $p \in S^\circ$ および $p \in T^\circ$ だから $p \in S^\circ \cap T^\circ$ となって $(S \cap T)^\circ \subset S^\circ \cap T^\circ$．一方, 任意の $p \in S^\circ \cap T^\circ$ に対して $p \in S^\circ$, $p \in T^\circ$ だから, $N_1 \subset S$ および $N_2 \subset T$ を満たす $N_1, N_2 \in \mathcal{N}_p$ が存在する．また，(N2) より $N_3 \subset N_1 \cap N_2 \subset S \cap T$ を満たす $N_3 \in \mathcal{N}_p$ が存在する．

従って $p \in (S \cap T)^\circ$，すなわち $S^\circ \cap T^\circ \subset (S \cap T)^\circ$ を得る．■

開核作用素と閉包作用素の関係を示す．

補題 7.8　写像 $\circ : \mathfrak{P}(E) \to \mathfrak{P}(E)$ を開核作用素とする．任意の $S \in \mathfrak{P}(E)$ に対して

$$S^b := ((S^c)^\circ)^c$$

とおく．このとき対応 $S \mapsto S^b$ は閉包作用素である．

証明　まず (1^b) を示す．(1°) より $E^\circ = E$ だから $\emptyset^b = ((\emptyset^c)^\circ)^c = (E^\circ)^c = E^c = \emptyset$.

(2^b) を示す．(2°) より $(S^c)^\circ \subset S^c$ だから，定義より $S \subset ((S^c)^\circ)^c = S^b$.

(3^b) を示す．$S^{cc} = S$ と (3°) より

$$S^{bb} = (((S^b)^c)^\circ)^c = (((((S^c)^\circ)^c)^c)^\circ)^c = (((S^c)^\circ)^\circ)^c = ((S^c)^\circ)^c = S^b.$$

(4^b) を示す．$S \subset T \in \mathfrak{P}(E)$ に対して，(4°) より

$$T^c \subset S^c \Longrightarrow (T^c)^\circ \subset (S^c)^\circ \Longrightarrow ((T^c)^\circ)^c \supset ((S^c)^\circ)^c,$$

すなわち $S^b \subset T^b$.

最後に (5^b) を示す．de Morgan の法則と (5°) より

$$\begin{aligned}(S \cup T)^b &= (((S \cup T)^c)^\circ)^c = ((S^c \cap T^c)^\circ)^c \\ &= ((S^c)^\circ \cap (T^c)^\circ)^c = ((S^c)^\circ)^c \cup ((T^c)^\circ)^c = S^b \cup T^b.\end{aligned}$$ ■

更に閉包作用素と閉集合系の関係を示す.

補題 7.9　写像 $b : \mathfrak{P}(E) \to \mathfrak{P}(E)$ を閉包作用素とする．部分集合族 $\mathcal{F} \subset \mathfrak{P}(E)$ を

$$\mathcal{F} := \{F \in \mathfrak{P}(E) \mid F^b = F\}$$

とおく．このとき $\mathcal{F}$ は閉集合系である.

証明　(1^b) より $(F3)$ が従う.

$(F0)$ を示す．(2^b) から $E \subset E^b$ であり，当然 $E^b \subset E$ だから $E = E^b$.

$(F1)$ を示す．(4^b) より任意の $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ に対して,

$$F_1 \cup F_2 = F_1^b \cup F_2^b = (F_1 \cup F_2)^b,$$

すなわち $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$.

最後に $(F2)$ を示す．任意の部分集合 $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ と任意の $F \in \mathcal{E}$ に対して，$\bigcap_{F\in\mathcal{E}} F \subset F$ だから (4^b) より $(\bigcap_{F\in\mathcal{E}} F)^b \subset F^b$ が任意の $F \in \mathcal{E}$ に対して成立する．すなわち, $(\bigcap_{F\in\mathcal{E}} F)^b \subset \bigcap_{F\in\mathcal{E}} F^b$．また, $F \in \mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ なので定義より $F = F^b$, すなわち $(\bigcap_{F\in\mathcal{E}} F)^b \subset \bigcap_{F\in\mathcal{E}} F^b = \bigcap_{F\in\mathcal{E}} F$．従って (2^b) より $\bigcap_{F\in\mathcal{E}} F \subset (\bigcap_{F\in\mathcal{E}} F)^b$ だから $\bigcap_{F\in\mathcal{E}} F = (\bigcap_{F\in\mathcal{E}} F)^b$．故に $\bigcap_{F\in\mathcal{E}} F \in \mathcal{F}$ となる. ∎

最後に閉集合系と開集合系の関係を示す.

補題 7.10　$\mathcal{F} \subset \mathfrak{P}(E)$ を閉集合系とし,

$$\mathcal{T} := \{U \in \mathfrak{P}(E) \mid U^c \in \mathcal{F}\}$$

とおく．このとき，$\mathcal{T} \subset \mathfrak{P}(E)$ は開集合系である.

証明　$(T0)$ は，$(F0)$ と $(F3)$ により $\emptyset^c = (E^c)^c = E \in \mathcal{F}$，すなわち $\emptyset \in \mathcal{T}$. 同様に $(T3)$ は，$(F0)$ と $(F3)$ により $E^c = \emptyset \in \mathcal{F}$，すなわち $E \in \mathcal{T}$.

次に $(T1)$ を示す．任意の $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ に対して $(F1)$ と de Morgan の法則より $(U_1 \cap U_2)^c = U_1^c \cup U_2^c \in \mathcal{F}$，すなわち $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

最後に $(T2)$ を示す．任意の $\mathfrak{S} \subset \mathcal{T}$ に対して $(F2)$ と de Morgan の法則より $(\bigcup_{U\in\mathfrak{S}} U)^c = \bigcap_{U\in\mathfrak{S}} U^c \in \mathcal{F}$，すなわち $\bigcup_{U\in\mathfrak{S}} U \in \mathcal{T}$. ∎

従って，今，我々はある開集合系 $\mathcal{T}_1 \subset \mathfrak{P}(E)$ から出発して，補題 7.6 によ

り開近傍系 $\mathcal{N}_1$ を得，補題 7.7 により開核作用素 $\circ_1$ を得，補題 7.8 により閉包作用素 b_1 を得，補題 7.9 により閉集合系 $\mathcal{F}_1$ を得，補題 7.10 により開集合系 $\mathcal{T}_2 \subset \mathfrak{P}(E)$ を得た.

定理 7.11　初めの開集合系 $\mathcal{T}_1$ と最後の開集合系 $\mathcal{T}_2$ の関係は

$$\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2.$$

証明　$\mathcal{T}_2$ は, 補題 7.10 における閉集合系 $\mathcal{F}_1$ から得られたものなので, 任意の $U \in \mathcal{T}_2$ に対して，$\mathcal{T}_2$ の作り方より $U \in \mathcal{T}_2 \Leftrightarrow U^c \in \mathcal{F}_1$．また，$\mathcal{F}_1$ は，補題 7.9 における閉包作用素 b_1 から得られたものなので, $\mathcal{F}_1$ の作り方より $(U^c)^{b_1} = U^c$. 更に b_1 は，補題 7.8 における開核作用素 $\circ_1$ から得られたものなので，b_1 の作り方より $U^c = (U^c)^{b_1} = (((U^c)^c)^{\circ_1})^c = (U^{\circ_1})^c$，すなわち $U = U^{\circ_1}$ を得る. 今，$\mathcal{N}_1$ を開近傍系とすれば，補題 7.7 における U°_1} の作り方より

$$\begin{aligned} U \in \mathcal{T}_2 \iff & \text{任意の } p \in U \text{ に対して} \\ & N \subset U \text{ を満たす } N \in \mathcal{N}_{1p} \text{が存在する.} \end{aligned} \tag{7.2.1}$$

つまりこの (7.2.1) と「$U \in \mathcal{T}_1$」の同値性を示せばよい．まず (7.2.1) を仮定する．任意の $p \in U$ について $N \subset U$ なる $N \in \mathcal{N}_{1p}$ を 1 つとってこれを N_p とおけば，$U = \bigcup_{p \in U} N_p$ を得る．補題 7.6 における $\mathcal{N}_{1p}$ の作り方より各 N_p は $\mathcal{T}_1$ に属するので，$U = \bigcup_{p \in U} N_p \in \mathcal{T}_1$ となる.

逆に「$U \in \mathcal{T}_1$」を仮定する．任意の $p \in U$ に対して，補題 7.6 より $U \in \mathcal{N}_{1p}$ だから，特に $N := U$ とおけば (7.2.1) が成り立つ．よって (7.2.1) と「$U \in \mathcal{T}_1$」の同値性が示され，$U \in \mathcal{T}_2 \Leftrightarrow U \in \mathcal{T}_1$，すなわち $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. ∎

同様に，今，我々はある開近傍系 $\mathcal{N}_1 : E \to \mathfrak{P}_0(E)$(または $\{\mathcal{N}_{1p}\}_{p \in E}$) から出発して，補題 7.7 により開核作用素 $\circ_1$ を得，補題 7.8 により閉包作用素 b_1 を得，補題 7.9 により閉集合系 $\mathcal{F}_1$ を得，補題 7.10 により開集合系 $\mathcal{T}_1$ を得，補題 7.6 により開近傍系 $\mathcal{N}_2$ を得た.

定理 7.12　初めの開近傍系 $\mathcal{N}_1$ と最後の開近傍系 $\mathcal{N}_2$(または $\{\mathcal{N}_{2p}\}_{p \in E}$) の関係は $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2$，すなわち任意の $p \in E$ に対して $\mathcal{N}_{1p} = \mathcal{N}_{2p}$ である.

証明　定理 7.11 の証明のようにして，$\mathcal{N}_2$ の構成を逆にたどっていくと，

$$
\begin{aligned}
\forall N \in \mathcal{N}_{2p} &\Longleftrightarrow p \in N \quad \text{かつ} \quad N \in \mathcal{T}_1 \\
&\Longleftrightarrow p \in N \quad \text{かつ} \quad N^c \in \mathcal{F}_1 \\
&\Longleftrightarrow p \in N \quad \text{かつ} \quad (N^c)^{b_1} = N^c \\
&\Longleftrightarrow p \in N \quad \text{かつ} \quad N = N^{\circ_1}.
\end{aligned}
$$

従って補題 7.7 における N°_1} の作り方より

$$
\begin{aligned}
\forall N \in \mathcal{N}_{2p} \quad \Longleftrightarrow \quad & p \in N \text{ かつ任意の点 } q \in N \text{ に対して} \\
& N' \subset N \text{ を満たす } N' \in \mathcal{N}_{1q} \text{が存在する.} \qquad (7.2.2)
\end{aligned}
$$

つまり，この (7.2.2) と「$N \in \mathcal{N}_{1p}$」の同値性を示せばよい．そこで，まず (7.2.2) を仮定する．任意の $q \in N$ について $N' \subset N$ なる $N' \in \mathcal{N}_{1p}$ を 1 つとり，これを N'_q とおけば，$N = \bigcup_{q \in N} N'_q$ を得る．$p \in N$ なので，$(N4)$ より $N \in \mathcal{N}_{1p}$ となる．

逆に「$N \in \mathcal{N}_{1p}$」を仮定する．$(N1)$ より $p \in N$．更に $\forall q \in N$ に対して，$N' := N$ とおけば，$(N3)$ より $N' \in \mathcal{N}_{1q}$，すなわち (7.2.2) が成り立つ．(7.2.2) と「$N \in \mathcal{N}_{1p}$」の同値性が示された．

よって，$N \in \mathcal{N}_{2p} \Leftrightarrow N \in \mathcal{N}_{1p}$，すなわち $\mathcal{N}_{1p} = \mathcal{N}_{2p}$ を得る． ∎

更に，同様の議論を開核作用素 $\circ_1$，閉包作用素 b_1，閉集合系 $\mathcal{F}_1$ に対して行えば，定理 7.11 や定理 7.12 と同様の結果が得られる．大切なことは，

「開集合系，開近傍系，開核作用素，閉包作用素，閉集合系という概念は，全て同値な概念である」

ということである．つまり，開集合系 $\mathcal{T}$ から開近傍系 $\mathcal{N}$ を作って，作った後に $\mathcal{T}$ を忘れてしまっても，$\mathcal{N}$ から完全に $\mathcal{T}$ が回復できるという点なのである．

問 7.13　開核作用素 $\circ$ を与えたとき，これから

$$
\text{閉包作用素} \Rightarrow \text{閉集合系} \Rightarrow \text{開集合系} \Rightarrow \text{開近傍系} \Rightarrow \text{開核作用素} \circ_1
$$

と構成した．このとき，$\circ = \circ_1$ を証明せよ．同様に閉包作用素，閉集合系について，$b = b_1$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$ を証明せよ．

7.3　位相

前節で見たように，集合 $E(\neq \emptyset)$ 上の概念として (1) 開集合系，(2) 開近傍系，(3) 開核作用素，(4) 閉包作用素，そして (5) 閉集合系は全て同値な概念である．すなわち，**1 つの概念を与えることは他の全てを同時に与えることと同じこと**なのである．今，集合 $E(\neq \emptyset)$ 上にこれら (1) ～ (5) の概念のうちのどれか 1 つを与えたとき，全ての概念を E に与えたことになり，この状態において我々は『E 上に**位相を導入した**』と称する．このとき E を**位相空間**という．通常，開集合系を使って位相を表すことが多く，記号としては位相空間 $(E, \mathcal{T})$ が使われる．開集合系で代表させるのは単なる通例であって，数学的には何も特別な意味はない．他の概念 (2), (3), (4), (5) から開集合を定義できるのだから，開集合だけを特別扱いする理由はないだろう．また，E に位相が導入されたとき，その開集合系 $\mathcal{T}$ を「**位相**」といい，「**位相 $\mathcal{T}$**」というのも同様である．

7.3.1　開集合

以下，$(E, \mathcal{T})$ を位相空間とする．

定義 7.14　E の部分集合 $U \in \mathfrak{P}(E)$ が (位相 $\mathcal{T}$ に関して) **開集合** (open set) であるとは，以下の条件を満たすことである：

任意の点 $p \in U$ に対して $p \in V \subset U$ を満たす $V \in \mathcal{T}$ が存在する．

命題 7.15　$U \in \mathfrak{P}(E)$ について，次の条件は，全て同値である：

(i)　U が開集合である．

(ii)　任意の点 $p \in U$ に対して $p \in N \subset U$ を満たす $N \in \mathcal{N}_p$ が存在する．

(iii)　$U \in \mathcal{T}$.

(iv)　$U^\circ = U$.

証明　まず，(i)⇒(ii) を示す．U を開集合とする．このとき，任意の点 $p \in U$ に対して $p \in V \subset U$ なる $V \in \mathcal{T}$ がとれる．従って

$$\mathcal{N}_p = \{N \in \mathcal{T} \mid p \in N\}$$

であったので，$V \in \mathcal{N}_p$ となる．

次に (ii)⇒(iii) を示す．今，各 $p \in U$ に対して $p \in N_p \subset U$ なる $N_p \in \mathcal{N}_p$ がとれるので，

$$U = \bigcup_{p \in U} N_p$$

となる．また，$N_p \in \mathcal{T}$ だから，(T2) より $U \in \mathcal{T}$ となる．

更に (iii)⇒(i) を示す．$\forall p \in U$ に対して $V := U$ とおけば，仮定より $V \in \mathcal{T}$ で明らかに $p \in V \subset U$ となる．

最後に (ii)⇔(iv) を示す．補題 7.7 における開核作用素 $\circ$ の作り方

$$U^\circ = \{p \in U \mid N \subset U \text{ を満たす } N \in \mathcal{N}_p \text{が存在する}\}$$

より (ii)⇔(iv) となる．∎

命題 7.16 任意の $S \in \mathfrak{P}(E)$ に対して，S° は S に含まれる最大の開集合である．つまり任意の開集合 U に対して，もしも $U \subset S$ ならば $U \subset S^\circ$ ということである．あからさまにいえば，

$$S^\circ = \bigcup_{\substack{U \in \mathcal{T} \\ U \subset S}} U$$

である (特に，(T2) より $S^\circ \in \mathcal{T}$)．

証明 まず，(4°) と命題 7.15 における (iv) ⇔ (i) により，もしも $U \subset S$ ならば $U = U^\circ \subset S^\circ (\subset S)$ となる．今，$T = \bigcup_{\substack{U \in \mathcal{T} \\ U \subset S}} U$ とおこう．初めに示したことより $T \subset S^\circ$ である．補題 7.7 における S° の作り方より，任意の $p \in S^\circ$ に対して，$p \in N \subset S$ であるような $N \in \mathcal{N}_p$ がとれる．従って補題 7.6 における $\mathcal{N}_p$ の作り方より $N \in \mathcal{T}$ だから $N \subset T$，すなわち $p \in T$ となり $S^\circ \subset T$．よって $S^\circ = T$ となる．∎

7.3.2 閉集合

定義 7.17 E の部分集合 $F \in \mathfrak{P}(E)$ が (位相 $\mathcal{T}$ に関して) **閉集合** (closed set) であるとは，次の条件を満たすことである：

$$F^c \in \mathcal{T}.$$

命題 7.18 $F \in \mathfrak{P}(E)$ に対して，以下は全て同値である：

(i) F が閉集合である．

(ii) $F \in \mathcal{F}$.

(iii) $F^b = F$.

証明　補題 7.9 における $\mathcal{F}$ の作り方より (ii)⇔(iii) である．

次に (i)⇔(iii) を示す．F を閉集合と仮定すると，定義より F^c は開集合であるから，命題 7.16 より $(F^c)^\circ = F^c$ となる．そこで，補題 7.8 における $\circ$ から b への作り方を思い出せば，

$$F^b = ((F^c)^\circ)^c = (F^c)^c = F$$

となる．逆に $F^b = F$ を仮定すれば，$F^b = ((F^c)^\circ)^c$ より，$F^c = (F^c)^\circ$ を得る．このとき，命題 7.15 より F^c が開集合となるので，F は閉集合となる．∎

命題 7.19　$S \in \mathfrak{P}(E)$ に対して S^b は S を含む最小の閉集合である．つまり，任意の閉集合 F に対して，もしも $S \subset F$ ならば $S^b \subset F$ が成り立つ．あからさまにいえば，

$$S^b = \bigcap_{\substack{F \in \mathcal{F} \\ S \subset F}} F$$

である (特に，$(F2)$ より $S^b \in \mathcal{F}$)．更に詳しく表せば，

$$S^b = \{p \in E \mid N \cap S \neq \emptyset,\ \forall N \in \mathcal{N}_p\} \tag{7.3.1}$$

となる．

証明　(4^b) と命題 7.18 における (i)⇔(iii) より，$S \subset F \Rightarrow S^b \subset F$ となる．更に補題 7.8 における b の作り方，命題 7.16 および de Morgan の法則により

$$S^b = ((S^c)^\circ)^c = (\bigcup_{\substack{U \in \mathcal{T} \\ U \subset S^c}} U)^c = \bigcap_{\substack{U \in \mathcal{T} \\ U \subset S^c}} U^c = \bigcap_{\substack{U^c \in \mathcal{F} \\ S \subset U^c}} U^c = \bigcap_{\substack{F \in \mathcal{F} \\ S \subset F}} F$$

となる．

最後に $S^b = \{p \in E \mid N \cap S \neq \emptyset,\ \forall N \in \mathcal{N}_p\}$ を示す．まず $p \notin S^b$ とせよ．このとき $(F2)$ から $S^b = \bigcap_{\substack{F \in \mathcal{F} \\ S \subset F}} F \in \mathcal{F}$，すなわち $N := (S^b)^c$ は，$p \in N$ なる開集合である．よって補題 7.6 における $\mathcal{N}_p$ の作り方および命題 7.15 の (iii) より，$N \in \mathcal{N}_p$ を得る．従って (2^b) より

$$S \cap N \subset S^b \cap N = S^b \cap (S^b)^c = \emptyset$$

だから，$p \notin \{q \in E \mid N \cap S \neq \emptyset,\ \forall N \in \mathcal{N}_q\}$ を得る．

逆に $p \notin \{q \in E \mid N \cap S \neq \emptyset,\ \forall N \in \mathcal{N}_q\}$ と仮定する．このとき，ある $N \in \mathcal{N}_p$ に対して $N \cap S = \emptyset$ となる．また補題 7.6 および命題 7.15 から，N は

開集合となるので，$F := N^c$ は閉集合となる．従って $N \cap S = \emptyset$ から $S \subset F$ だから，初めに示したことにより $S^b \subset F$ となる．よって $p \in N$ と $p \notin F$ より $p \notin S^b$ を得る． ∎

7.4 位相の強弱

命題 7.20 集合 $E(\neq \emptyset)$ に 2 つの位相 $\mathcal{T}_1$ と $\mathcal{T}_2$ が導入されているとする．このとき，以下の 4 つの条件は全て同値である：

(i) $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$.

(ii) 任意の $U \in \mathcal{T}_1$ に対して，$p \in U$ を任意に選べば $p \in U' \subset U$ を満たす $U' \in \mathcal{T}_2$ が存在する．

(iii) 任意の $p \in E$ と $N \in \mathcal{N}_{1p}$ を任意にとれば，$N' \subset N$ を満たす $N' \in \mathcal{N}_{2p}$ が存在する．

(iv) 任意の $p \in E$ に対して，$\mathcal{N}_{1p} \subset \mathcal{N}_{2p}$ が成り立つ．

証明 まず (i)⇒(ii) を示す．仮定より $U \in \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ だから，$U' := U$ とおけばよい．

次に (ii)⇒(iii) を示す．$p \in E$ を任意に固定する．各 $N \in \mathcal{N}_{1p}$ に対して，$p \in U := N \in \mathcal{T}_1$ だから，仮定より $p \in U' \subset U$ を満たす $U' \in \mathcal{T}_2$ が存在する．従って $p \in U' \in \mathcal{T}_2$ だから，$N' := U'$ とおけば $N' \in \mathcal{N}_{2p}$ となる．

更に (iii)⇒(iv) を示す．任意の $N \in \mathcal{N}_{1p}$ に対して，$(N3)$ より $N \in \mathcal{N}_{1q}$, $q \in N$．よって，仮定より，$N'_q \subset N$ を満たす $N'_q \in \mathcal{N}_{2q}$ が存在するから

$$N = \bigcup_{q \in N} N'_q$$

となる．従って $p \in N$ だから，$N = \bigcup_{q \in N} N'_q \in \mathcal{N}_{2p}$，すなわち $\mathcal{N}_{1p} \subset \mathcal{N}_{2p}$ となる．

最後に (iv)⇒(i) を示す．任意の $U \in \mathcal{T}_1$ に対して，もしも $U = \emptyset$ ならば，$(T0)$ より $U \in \mathcal{T}_2$ となるから，$p \in U$ の存在が仮定できる．このとき $U \in \mathcal{N}_{1p}$ だから，仮定より $U \in \mathcal{N}_{2p}$，すなわち $U \in \mathcal{T}_2$ となる． ∎

定義 7.21 集合 $E(\neq \emptyset)$ に 2 つの位相 $\mathcal{T}_1$ と $\mathcal{T}_2$ が導入されているとする．命題 7.20 の 4 つの条件のうちどれか 1 つ (従って全て) が成立しているとき，$\mathcal{T}_2$ は $\mathcal{T}_1$ より**強い**，$\mathcal{T}_1$ は $\mathcal{T}_2$ より**弱い** (または，$\mathcal{T}_2$ は $\mathcal{T}_1$ より**細かい**，$\mathcal{T}_1$ は $\mathcal{T}_2$ よ

り**粗い**) といって,

$$\mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2$$

と書く.

命題 7.20 における (i) から，明らかに

$$\mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_2 \quad \text{かつ} \quad \mathcal{T}_2 < \mathcal{T}_1 \Longleftrightarrow \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$$

が成り立つ (このとき 2 つの位相空間 $(E, \mathcal{T}_1)$ と $(E, \mathcal{T}_2)$ は**同値**であるという).

7.5　位相の生成

ベクトル空間 V には基底があって，V の任意の元は基底の 1 次結合で書ける．位相空間の場合でも，基底に対応する $\mathcal{T}$ の部分集合族があって，任意の開集合がそれらの元の和集合として表せることを見よう．

定義 7.22　$(E, \mathcal{T})$ を位相空間とし，$\mathfrak{B}$ を E の部分集合の族 $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{P}(E)$ とする．$\mathfrak{B}$ が次の条件を満たすとき，$\mathfrak{B}$ を $(E, \mathcal{T})$ の**開基** (open basis) とよぶ：

(B1)　$\mathfrak{B} \subset \mathcal{T}$.

(B2)　任意の点 $p \in E$ と任意の $N \in \mathcal{N}_p$ に対して $p \in V \subset N$ を満たす $V \in \mathfrak{B}$ が存在する．

命題 7.23　$(E, \mathcal{T})$ を位相空間とし, $\mathfrak{B} \subset \mathcal{T}$ とする．このとき, $\mathfrak{B}$ が $(E, \mathcal{T})$ の開基であるための必要十分条件は，任意の $U \in \mathcal{T}$ に対して

$$U = \bigcup_{\substack{V \in \mathfrak{B} \\ V \subset U}} V$$

となることである．

証明　まず (⇒) を示す．任意の $U \in \mathcal{T}$ に対して，$W := \bigcup_{\substack{V \in \mathfrak{B} \\ V \subset U}} V$ とおけば，明らかに $W \subset U$ である．任意の $p \in U$ に対して $U \in \mathcal{N}_p$ であるから，(B2) より，$p \in V \subset U$ を満たす $V \in \mathfrak{B}$ が存在する．従って $V \subset W$ より $p \in W$, すなわち $U \subset W$．よって $U = W$ となる．

(⇐) を示す．仮定より任意の $U \in \mathcal{T}$ に対して $U = \bigcup_{\substack{V \in \mathfrak{B} \\ V \subset U}} V$ であるが，更に命題 7.23 の仮定より，$(B1)$ は自明である．$(B2)$ を示せば良い．そこで，$p \in E$ および $N \in \mathcal{N}_p$ を任意にとれば，$N \in \mathcal{T}$ だから $N = \bigcup_{\substack{V \in \mathfrak{B} \\ V \subset N}} V$ となる．従って $p \in V \subset N$ を満たす $V \in \mathfrak{B}$ が存在する． ∎

開基は開集合系や開近傍系などの諸概念とは違って，位相空間 $(E, \mathcal{T})$ に対して一意的に定まる概念ではない．つまり，一般的に，与えられた位相 $\mathcal{T}$ に対して，その開基 $\mathfrak{B}$ は何通りもの可能性がある．しかしながら，命題 7.23 から解るように，開基 $\mathfrak{B}$ は位相 $\mathcal{T}$ を思い出すのには十分なものであり，しかも，一般に $\mathcal{T}$ よりもずっと小さくとれるので非常に便利である．また次の命題から解るように，開基を使って位相を導入することもできる．

命題 7.24 集合 $E(\neq \emptyset)$ に対して，$\mathfrak{B} \subset \mathfrak{P}(E)$ を E の部分集合の族とする．今 $E = \bigcup_{V \in \mathfrak{B}} V$ と仮定する．更に $\mathfrak{B}$ が次の条件 (7.5.1) を満たすとする：

$$\begin{aligned}&\text{任意の } U, V \in \mathfrak{B} \text{ と } p \in U \cap V \text{ に対して} \\ &\qquad p \in W \subset U \cap V \text{ を満たす } W \in \mathfrak{B} \text{ が存在する．}\end{aligned} \tag{7.5.1}$$

このとき，

$$\mathcal{T}(\mathfrak{B}) := \left\{ U \in \mathfrak{P}(E) \,\middle|\, U = \bigcup_{\substack{V \in \mathfrak{B} \\ V \subset U}} V \right\}$$

とおけば，$\mathcal{T}(\mathfrak{B})$ は開集合系の公理 $(T0) \sim (T3)$ を満たす．

証明 $(T0)$ と $(T3)$ は明らかである．

次に $(T1)$ を示す．$U_1, U_2 \in \mathcal{T}(\mathfrak{B})$ とする．仮定より，

$$U_1 = \bigcup_{\substack{V \in \mathfrak{B} \\ V \subset U_1}} V, \qquad U_2 = \bigcup_{\substack{V \in \mathfrak{B} \\ V \subset U_2}} V$$

である．示すべきことは

$$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{\substack{V \in \mathfrak{B} \\ V \subset U_1 \cap U_2}} V$$

である．(⊃) は明らか．そこで (⊂) を示そう．

条件 (7.5.1) より，任意の $p \in U_1 \cap U_2$ に対して，$p \in V \subset U_1 \cap U_2$ を満たす

$V \in \mathfrak{B}$ が存在することより明らか．

最後に $(T2)$ を示す．任意の $\mathfrak{S} \subset \mathcal{T}(\mathfrak{B})$ に対して $W := \bigcup_{U \in \mathfrak{S}} U$ とおく．示すべきことは $W = \bigcup_{\substack{V \in \mathfrak{B} \\ V \subset W}} V$ である．仮定より，任意の $U \in \mathfrak{S}$ に対して $U = \bigcup_{\substack{V \in \mathfrak{B} \\ V \subset U}} V$ だから，

$$W = \bigcup_{U \in \mathfrak{S}} U = \bigcup_{U \in \mathfrak{S}} \bigcup_{\substack{V \in \mathfrak{B} \\ V \subset U}} V \subset \bigcup_{U \in \mathfrak{S}} \bigcup_{\substack{V \in \mathfrak{B} \\ V \subset W}} V.$$

従って $\bigcup_{\substack{V \in \mathfrak{B} \\ V \subset W}} V$ は $U \in \mathfrak{S}$ によらないので，$\bigcup_{U \in \mathfrak{S}} \bigcup_{\substack{V \in \mathfrak{B} \\ V \subset W}} V = \bigcup_{\substack{V \in \mathfrak{B} \\ V \subset W}} V$ だから，上の関係式と合わせて，$W \subset \bigcup_{\substack{V \in \mathfrak{B} \\ V \subset W}} V$ となる．従って明らかに $W \supset \bigcup_{\substack{V \in \mathfrak{B} \\ V \subset W}} V$ だから，$W = \bigcup_{\substack{V \in \mathfrak{B} \\ V \subset W}} V$ となる．∎

系 7.25　集合 $E(\neq \emptyset)$ に対して，$\mathfrak{B} \subset \mathfrak{P}(E)$ を E の部分集合の族とする．今 $E = \bigcup_{V \in \mathfrak{B}} V$ と仮定する．このとき，$\mathfrak{B}$ が E の何らかの位相に関する開基となっているための必要十分条件は，(7.5.1) が成り立つことである．

証明　$(\Rightarrow)$ を示す．$\mathfrak{B}$ が位相 $\mathcal{T}$ の開基であるとすると，任意の $U, V \in \mathfrak{B}$ および任意の $p \in U \cap V$ に対して，$(B1)$ より $\mathfrak{B} \subset \mathcal{T}$ だから，$U, V \in \mathcal{T}$，すなわち $U, V \in \mathcal{N}_p$ となる．更に $(N2)$ より $N \subset U \cap V$ を満たす $N \in \mathcal{N}_p$ が存在する．従って $(B2)$ より $p \in W \subset N$ を満たす $W \in \mathfrak{B}$ が存在するから，$p \in W \subset N \subset U \cap V$ を得る．

$(\Leftarrow)$ を示す．命題 7.24 により $\mathcal{T}(\mathfrak{B})$ は E の位相を定める．この位相 $\mathcal{T}(\mathfrak{B})$ に関して，$\mathfrak{B}$ が開基であることを示そう．明らかに $\mathfrak{B} \subset \mathcal{T}(\mathfrak{B})$ なので，$(B1)$ は成立．$(B2)$ を示したい．任意の点 $p \in E$ と任意の $N \in \mathcal{N}_p := \mathcal{N}(\mathfrak{B})_p$ をとる．$N \in \mathcal{T}(\mathfrak{B})$ だから

$$N = \bigcup_{\substack{V \in \mathfrak{B} \\ V \subset N}} V.$$

従って $p \in V \subset N$ を満たす $V \in \mathfrak{B}$ を得る．∎

定義 7.26　$(E, \mathcal{T})$ を位相空間とする．位相 $\mathcal{T}$ の開基 $\mathfrak{B}$ が，高々可算個の開集合より成り立つとき，$(E, \mathcal{T})$ は**第 2 可算公理を満たす**という．

第 2 可算公理を満たす位相空間 $(E, \mathcal{T})$ には，$\mathfrak{B} = \{U_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{T}$ で開基となっているものが存在する．

定義 7.27 $(E, \mathcal{T})$ を位相空間とし，$p \in E$ を固定する．E の部分集合の族 $\mathfrak{B}_p \subset \mathfrak{P}(E)$ が以下の 2 条件を満たすとき，$\mathfrak{B}_p$ を p **における近傍基** (open neighborhood basis) という：

(*NB*1)　$\mathfrak{B}_p \subset \mathcal{N}_p$.

(*NB*2)　任意の $N \in \mathcal{N}_p$ に対して $V \subset N$ を満たす $V \in \mathfrak{B}_p$ が存在する．

命題 7.28 $(E, \mathcal{T})$ を位相空間とし，その開基を $\mathfrak{B}$ とする．このとき，任意の $p \in E$ に対して

$$\mathfrak{B}_p := \{V \in \mathfrak{B} \,|\, p \in V\}$$

とおけば，$\mathfrak{B}_p$ は p における近傍基である．

証明 仮定より $\mathfrak{B} \subset \mathcal{T}$ だから，任意の $V \in \mathfrak{B} \subset \mathcal{T}$ に対して，$p \in V$ ならば $V \in \mathcal{N}_p$，すなわち $\mathfrak{B}_p \subset \mathcal{N}_p$ となる．

更に，任意の $N \in \mathcal{N}_p$ に対して開基の公理 (*B*2) より，$p \in V \subset N$ を満たす $V \in \mathfrak{B}$ が存在する．すなわち $V \in \mathfrak{B}_p$ で $V \subset N$ となる． ∎

定義 7.29 $(E, \mathcal{T})$ を位相空間とするとき，これが**第 1 可算公理を満たす**とは，任意の $p \in E$ に対して高々可算個の近傍基が存在する．すなわち任意の $p \in E$ に対して

$$\mathfrak{B}_p = \{U_n^p\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{N}_p$$

で近傍基となっているものが存在することをいう．

命題 7.28 よりただちに，

系 7.30 位相空間 $(E, \mathcal{T})$ が第 2 可算公理を満たすなら，第 1 可算公理を満たす．

第8章　種々の位相空間

位相空間の例を多数あげて位相への理解を深めてもらうことがこの章の目的である．特に，連続関数の連続性について詳しく説明する．通常の微分積分学では，連続関数は ε-δ 論法を用いた，数直線 (または $\mathbf{R}^n$) を距離空間とみなした距離空間の概念として説明される．他方『集合と位相』で学ぶ連続写像は位相空間に対する概念だから，両者の整合性をはっきりとつけよう．分離公理やコンパクト性も重要だが，連結性，弧状連結性の解説から道の空間のホモトピーへ進み，基本群の導入などの曲面の大域的議論に必要な道具を準備する．基本群や被覆空間の最も単純な例として，単位円周の直線への展開を解説する．普遍被覆写像，基本群などの諸概念は 10 章の平坦曲面の平面上への局所展開のさいに具体的に説明する．

8.1　密着位相と離散位相

定義 8.1　$E(\neq \emptyset)$ を集合とする．このとき，$\mathcal{T}_0 \subset \mathfrak{P}(E)$ を

$$\mathcal{T}_0 := \{\emptyset,\, E\}$$

とおけば，明らかに $\mathcal{T}_0$ は開集合系の公理 $(T0) \sim (T3)$ を満たす．これによって導入される位相を**密着位相** (trivial topology) という．

この位相 $\mathcal{T}_0$ では，閉集合系も $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset,\, E\}$ となり，その開核作用素 o_0 は，もしも $S = \emptyset \in \mathfrak{P}$ ならば $S^{o_0} = \emptyset$ であり，もしも $S \neq \emptyset \in \mathfrak{P}$ ならば $S^{o_0} = E$ となる．閉包作用素 b_0 も開核作用素と同様の対応となる．

定義 8.2　$E(\neq \emptyset)$ を集合とする．このとき $\mathcal{T}_1 := \mathfrak{P}(E)$ とおけば，明らかに

$\mathcal{T}_1$ は開集合系の公理 $(T0) \sim (T3)$ を満たす．これによって導入される位相を**離散位相** (discrete topology) という．

この位相 $\mathcal{T}_1$ では閉集合系も $\mathcal{F}_1 = \mathfrak{P}(E)$ となり，開核作用素および閉包作用素はともに $\mathfrak{P}(E)$ から $\mathfrak{P}(E)$ への恒等写像となる．

命題 8.3 離散位相は考え得る限りで最強の，密着位相は考える限りで最弱の位相である．すなわち，E の位相 $\mathcal{T}$ に対して $\mathcal{T}_0 < \mathcal{T} < \mathcal{T}_1$ が成立する．

証明 命題 7.20 より明らか． ∎

命題 8.4 集合 $E(\neq \emptyset)$ 上の位相 $\mathcal{T}$ が離散位相であるための必要十分条件は，任意の $p \in E$ に対して $\{p\} \in \mathcal{T}$ が成立することである．

証明 $(\Rightarrow)$ は明らか．

$(\Leftarrow)$ を示す．任意の $S \in \mathfrak{P}(E)$ に対して

$$S = \bigcup_{p \in S} \{p\}$$

だから $(T2)$ より $S \in \mathcal{T}$，すなわち $\mathfrak{P}(E) \subset \mathcal{T}$ となる．従って，仮定より $\mathcal{T} = \mathfrak{P}(E)$ を得る． ∎

8.1.1 相対位相

定義 8.5 $(E, \mathcal{T})$ を位相空間とし，$S \subset E$ を任意の部分集合とする．今，

$$\mathcal{T}_S := \{S \cap U \,|\, U \in \mathcal{T}\}$$

とおけば，$\mathcal{T}_S$ は S の開集合系となる．これによって導入される S の位相を $\mathcal{T}$ **から導入された S の相対位相** (relative topology) という．

このとき閉集合系は $\mathcal{F}_S = \{S \cap F \mid F \in \mathcal{F}\}$ であり，その開核作用素 $\circ_S$ は

$$T \in \mathfrak{P}(E) \longmapsto T^{\circ_S} := T^\circ \cap S \in \mathfrak{P}(E)$$

で与えられ，その閉包作用素 b_S は

$$T \in \mathfrak{P}(E) \longmapsto T^{b_S} := T^b \cap S \in \mathfrak{P}(E)$$

で与えられる．

8.1.2 距離空間は位相空間である

定義 8.6　$E(\neq \emptyset)$ を集合とする．E 上の**距離関数** d (distance function) は以下の条件を満たす関数

$$d : E \times E \longrightarrow \mathbf{R}$$

で定義される．

(M1)　任意の 2 点 $x, y \in E$ に対して $d(x, y) \geq 0$.

(M2)　$d(x, y) = 0 \iff x = y$.

(M3)　任意の 2 点 $x, y \in E$ に対して $d(x, y) = d(y, x)$.

(M4)　任意の 3 点 $x, y, z \in E$ に対して

$$d(x, y) \leq d(y, z) + d(z, x) \quad (\text{三角不等式}).$$

集合 E とその上の距離関数 d との組 (E, d) を**距離空間** (metric space) という．

命題 8.7　(E, d) を距離空間とする．$p \in E$ および $r(>0) \in \mathbf{R}$ に対して，

$$B_r(p) := \{x \in E \mid d(p, x) < r\} \qquad (\text{開球})$$

とおく．このとき，E には $\mathfrak{B} := \{B_r(p) \mid p \in E,\ r(>0) \in \mathbf{R}\}$ を開基とする位相 $\mathcal{T}_d$(距離位相) が一意的に存在する．

証明　存在が証明されたとしよう．一意性は命題 7.23 より明らかである．$\mathcal{T}_d$ の存在を示すために，系 7.25 を参考にして条件 (7.5.1) を検証する．

もしも $B_r(p) \cap B_s(q) = \emptyset$ ならば何も示すことがないので，$B_r(p) \cap B_s(q) \neq \emptyset$ と仮定する．

任意の $t \in B_r(p) \cap B_s(q)$ に対して，定義より，$d(p, t) < r$ かつ $d(q, t) < s$ である．

今，実数 $\varepsilon > 0$ を $0 < \varepsilon < r - d(p, t)$ かつ $0 < \varepsilon < s - d(q, t)$ を満たすようにとる．すると，$d(x, t) < \varepsilon$ を満たす任意の $x \in E$ に対して，三角不等式により

$$d(p, x) \leq d(p, t) + d(t, x) < (r - \varepsilon) + \varepsilon = r,$$
$$d(q, x) \leq d(q, t) + d(t, x) < (s - \varepsilon) + \varepsilon = s.$$

故に $x \in B_\varepsilon(t) \subset B_r(p) \cap B_s(q)$ を得る．これで (7.5.1) が示され，系 7.25 よ

り $\mathfrak{B}$ を開基とする位相 $\mathcal{T}_d$ が存在する. ∎

注意 8.8 距離空間 (E, d) において, 一般に距離 d が引き起こす位相 $\mathcal{T}_d$ から距離 d を思い出すことはできない. なぜなら d とは異なる距離 d' が $\mathcal{T}_d$ と同値な位相を引き起こすことがあり得る. 完備 Riemann 多様体 (9.6 節) の例 9.51 を参照せよ.

8.2 連続写像

8.2.1 連続写像

定義 8.9 $(E, \mathcal{T}), (E', \mathcal{T}')$ をそれぞれ位相空間とし, $f: E \to E'$ を写像とする. f が以下の条件を満たすとき (位相 $\mathcal{T}$ および $\mathcal{T}'$ に関して) **連続** (continuous) であるという:

$$\text{任意の } U' \in \mathcal{T}' \text{ に対して } f^{-1}(U') \in \mathcal{T} \text{ が成り立つ.}$$

(すなわち, 開集合の逆像は開集合ということ.)

命題 8.10 $(E, \mathcal{T}), (E', \mathcal{T}')$ をそれぞれ位相空間とし, $f: E \to E'$ を写像とする. このとき以下は全て同値である:

(1) f は連続である.

(2) 任意の $F \in \mathcal{F}'$ に対して $f^{-1}(F) \in \mathcal{F}$ が成り立つ. (ここで, $\mathcal{F}$ および $\mathcal{F}'$ はそれぞれ E, E' に対する閉集合系である.)

(3) 任意の $x \in E$ と任意の $N' \in \mathcal{N}'_y$(ただし, $y = f(x)$) に対して $f(N) \subset N'$ を満たす $N \in \mathcal{N}_x$ が存在する. (ここで, $\mathcal{N}$ および $\mathcal{N}'$ はそれぞれ $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ に対する開近傍系である.)

(4) 任意の $S \in \mathfrak{P}(E)$ に対して $f(S^b) \subset (f(S))^{b'}$ が成り立つ. (ここで, b および b' はそれぞれ $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ に対する閉包作用素である.)

(5) 任意の $S' \in \mathfrak{P}(E')$ に対して $(f^{-1}(S'))^b \subset f^{-1}(S'^{b'})$ が成り立つ.

(6) 任意の $S' \in \mathfrak{P}(E')$ に対して $f^{-1}(S'^{\circ'}) \subset (f^{-1}(S'))^\circ$ が成り立つ. (ここで $\circ$ および $\circ'$ はそれぞれ $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ に対する開核作用素である.)

証明 (1) $\Leftrightarrow$ (2) は, $f^{-1}(S^c) = (f^{-1}(S))^c$ という事実から直ちに解る.

(1) $\Rightarrow$ (3) を示そう. 任意の $x \in E$, $N' \in \mathcal{N}'_y$ $(y = f(x))$ に対して N' は E' の開集合だから, f の連続性より $f^{-1}(N')$ は開集合. また, $x \in f^{-1}(N')$ だか

ら $f^{-1}(N') \in \mathcal{N}_x$ である．従って $N := f^{-1}(N')$ とおけばよい．

次に，(3) ⇒ (1) を示そう．$U' \in \mathcal{T}'$ を任意にとる．もしも $f^{-1}(U') = \emptyset$ ならば, $\emptyset \in \mathcal{T}$ だからおしまい．そこで $U := f^{-1}(U') \neq \emptyset$ とする．任意の $x \in U$ に対して $f(x) = y$ とすると，$y \in U'$ だから $U' \in \mathcal{N}'_y$ となって，$f(N_x) \subset U'$ を満たす $N_x \in \mathcal{N}_x$ がとれる．従って

$$U = \bigcup_{x \in U} N_x.$$

ここで各 $N_x \in \mathcal{T}$ だから $U \in \mathcal{T}$ を得る．よって (1) ⇔ (3) が成立する．

(3) ⇒ (4) を示すために，命題 7.19 における (7.3.1) を思い出そう．$x \in S^b$, $y = f(x)$ とおく．$N' \in \mathcal{N}'_y$ を任意にとる．ここで $f(S) \cap N' \neq \emptyset$ を示そう．仮定より $f(N) \subset N'$ を満たす $N \in \mathcal{N}_x$ が存在し, $x \in S^b$ だから $S \cap N \neq \emptyset$ となる．従って

$$\emptyset \neq f(S \cap N) \subset f(S) \cap f(N) \subset f(S) \cap N'$$

となって $y \in (f(S))^{b'}$，すなわち $f(S^b) \subset (f(S))^{b'}$ を得る．

次に (4) ⇒ (2) を示す．$F' \in \mathcal{F}'$ を任意にとり $F := f^{-1}(F')$ とする．主張は $F \in \mathcal{F}$ すなわち $F^b = F$ である．$F \subset F^b$ はつねに成立するので $F^b \subset F$ を示す．任意の $x \in F^b$ に対して $f(x) \in f(F^b)$，また仮定より $f(x) \in (f(F))^{b'}$ となる．更に $f(F) = f(f^{-1}(F')) \subset F'$ で $F'^{b'} = F'$ だから，(4^b) より $(f(F))^{b'} \subset F'$ となる．従って $f(x) \in F'$ となって，$x \in f^{-1}(F') = F$ すなわち $F^b \subset F$ を得る．

次に (3) ⇒ (5) を示す．$S' \in \mathfrak{P}(E')$ に対して $x \in (f^{-1}(S'))^b$ を任意にとる．任意の $N \in \mathcal{N}_x$ に対して $N \cap f^{-1}(S') \neq \emptyset$ である．さて，任意の $N' \in \mathcal{N}'_y$ ($y = f(x)$) に対し，仮定より $f(N) \subset N'$ を満たす $N \in \mathcal{N}_x$ が存在する．よって，$N \cap f^{-1}(S') \neq \emptyset$ なので $z \in N \cap f^{-1}(S')$ がとれて

$$f(z) \in f(N) \cap f(f^{-1}(S')) \subset N' \cap S'.$$

故に $N' \cap S' \neq \emptyset$，これは $y \in (S')^{b'}$ を意味するから $x \in f^{-1}(S'^{b'})$ となり，$(f^{-1}(S'))^b \subset f^{-1}(S'^{b'})$ を得る．

次に (5) ⇒ (2) を示す．$F' \in \mathcal{F}'$ として，$F := f^{-1}(F')$ とする．示すべきことは上と同様に $F^b \subset F$ である．$F'^{b'} = F'$ だから，仮定より以下を得る：

$$F^b = (f^{-1}(F'))^b \subset f^{-1}(F'^{b'}) = f^{-1}(F') = F.$$

(1) ∼ (5) の同値性は証明された．これらと (6) の同値性を示すため，(6) と (5) について示せばよい．これは $f^{-1}(S^c) = (f^{-1}(S))^c$ と $S^b = ((S^c)^\circ)^c$，およびこれらから導かれる $S^\circ = ((S^c)^b)^c$ から解る． ∎

8.2.2 連続関数

定義 8.11 $(E, \mathcal{T})$ を位相空間とする．$\mathbf{R}$ を実数全体の集合とし，$\mathbf{R}$ には通常の距離空間としての位相 $\mathcal{T}_d$ を入れる．このとき，連続写像

$$f : (E, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbf{R}, \mathcal{T}_d)$$

を通常 (実数値) **連続関数**という．

連続関数の連続性について調べるために次の補題を用意する：

補題 8.12 $(E, \mathcal{T})$ と $(E', \mathcal{T}')$ を位相空間とする．$\mathbf{R}$ を実数全体の集合とし，$\mathbf{R}$ には通常の距離位相 $\mathcal{T}_d$ を入れる．このとき，

(1) 任意の $x \in \mathbf{R}$ に対して $\mathfrak{B}_x := \{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$ は $(\mathbf{R}, \mathcal{T}_d)$ の x における近傍基をなす．

(2) E および E' の各点における近傍基 $\{\mathfrak{B}_p\}_{p\in E}$, $\{\mathfrak{B}'_q\}_{q\in E'}$ がそれぞれ与えられたとき，写像 $f : E \to E'$ が連続であるための必要十分条件は，任意の $x \in E$ および任意の $N' \in \mathfrak{B}'_y$ $(y = f(x))$ に対し以下が成立することである：

$$f(N) \subset N' \text{を満たす } N \in \mathfrak{B}_x \text{が存在する．}$$

証明 まず (1) を示す．そのために，定義 7.27 の条件を確かめる．$(NB1)$ は明らかなので，$(NB2)$ を確かめればよい．

任意の $N \in \mathcal{N}_p$ $(p \in \mathbf{R})$ をとる．命題 8.7 より，そもそも $\mathcal{T}_d$ は $\mathbf{R}$ の開区間全体を開基としていたので，開基の条件 $(B2)$ から，$p \in (a, b) \subset N$ なる開区間 (a, b) がとれる．従って，ε を $0 < \varepsilon < \min\{b-p, p-a\}$ なる実数とすれば，$p \in (p-\varepsilon, p+\varepsilon) \in (a, b) \subset N$ となって，$(NB2)$ が成立する．

最後に (2) を示す．すなわち命題 8.10 における (3) との同値性を示せばよい．そこで命題 8.10 における (3) を仮定する．このとき，任意の $x \in E$ および任意の $N' \in \mathfrak{B}'_y$ $(\subset \mathcal{N}'_y)$ (ただし $y = f(x)$) に対して

$$f(\widetilde{N}) \subset N' \text{を満たす} \widetilde{N} \in \mathcal{N}_x \text{が存在する．}$$

(ここで，$\mathcal{N}$ および $\mathcal{N}'$ はそれぞれ $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$ に対する開近傍系である．) 従って開

基の定義より，$N \subset \widetilde{N}$ を満たす $N \in \mathfrak{B}_x$ が存在するから，$f(N) \subset f(\widetilde{N}) \subset N'$ を得る．すなわち，必要性が証明された．

次に十分性を示す．$x \in E$ および $\widetilde{N}' \in \mathcal{N}'_y$ を任意にとる．$(NB2)$ より $N' \subset \widetilde{N}'$ を満たす $N' \in \mathfrak{B}'_y$ が存在するから，仮定より，$f(N) \subset N'$ を満たす $N \in \mathfrak{B}_x$ を得る．従って $(NB1)$ より $N \in \mathcal{N}_x$ であり，$f(N) \subset N' \subset \widetilde{N}'$ を得る．∎

系 8.13　$(E, \mathcal{T})$ を位相空間とする．$\mathbf{R}$ を実数全体の集合とし，$\mathbf{R}$ には，Euclid 位相 $\mathcal{T}_d$ を入れる．また，$\{\mathfrak{B}_p\}_{p\in E}$ を各点 $p \in E$ における近傍基とする．このとき関数 $f : E \to \mathbf{R}$ が $\mathcal{T}$ と $\mathcal{T}_d$ に関して点 $p \in E$ において連続であるための必要十分条件は，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$q := f(p)$ とおいたとき，

$$f(N) \subset (q - \varepsilon,\, q + \varepsilon) \text{ を満たす } N \in \mathfrak{B}_p \text{が存在する}$$

ことである．E の各点において f が連続のとき，f は E で連続である (すなわち E 上の連続関数) という．

証明　補題 8.12 より明らか．∎

特に $(E, \mathcal{T}) = (\mathbf{R}, \mathcal{T}_d)$ のときは，関数 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ が連続であるための必要十分条件は，$p \in \mathbf{R}$ を任意に固定したとき，

$$\begin{aligned} &\text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して } |x - p| < \delta \\ &\qquad \Longrightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon \text{ を満たす } \delta > 0 \text{ が存在する} \end{aligned}$$

となることである．

8.2.3　同相写像

定義 8.14　$(E, \mathcal{T})$, $(E', \mathcal{T}')$ をそれぞれ位相空間とする．写像 $f : E \to E'$ は全単射であって，$f : E \to E'$, $f^{-1} : E' \to E$ がいずれも連続であるとき，f を**位相写像**または**同相写像** (homeomorphism) とよび，

$$f : E \simeq E'$$

で表す．位相空間 $(E, \mathcal{T})$, $(E', \mathcal{T}')$ は，位相写像 $f : E \simeq E'$ が存在するとき**同位相**または**同相** (homeomorphic) といって，

$$E \simeq E'$$

で表す．

同相な関係は同値関係を定義する．同相関係によって保たれる性質を**位相不変な性質** (topological invariant) という．後述する Euler 標数，性数 (曲面の穴の数)，連結性や k 重連結性などが位相不変な性質 (位相不変量) である．E の開 (閉) 集合の f による像が開 (閉) 集合のとき，f を**開 (閉) 写像**という．同相写像は全単射で連続な開 (閉) 写像である．

8.3 集積点と孤立点

定義 8.15 $(E, \mathcal{T})$ を位相空間とし，$S \subset E$ を部分集合とする．

(1) $p \in E$ が $p \in (S \setminus \{p\})^b$ を満たすとき，p を S の**集積点** (accumulation point) という．

(2) $p \in S$ が S の集積点でないとき，$p \in S$ を S の**孤立点** (isolated point) という．

(3) $S^a := \{\, p \in E \,|\, p$ は S の集積点 $\}$ を S の**導集合** (derived set) という．

命題 8.16 $S \subset E$ が閉集合であるための必要十分条件は，$S^a \subset S$ となることである．

証明 まず ($\Rightarrow$) を示す．任意の $p \in S^a$ に対して，仮定より $S = S^b$ だから，$p \in (S \setminus \{p\})^b \subset S^b = S$．よって $S^a \subset S$ を得る．

($\Leftarrow$) を示す．任意の $p \in S^b$ に対して $p \notin S$ と仮定すると，$S \setminus \{p\} = S$ なので $p \in S^b = (S \setminus \{p\})^b$ となる．従って p は S の集積点だから $p \in S^a$ となる．ところが，$S^a \subset S$ なので $p \in S$ となり，矛盾．従って $p \in S$，すなわち $S^b \subset S$ となり，$S^b = S$ を得る． ∎

命題 8.17 $S \cup S^a$ は閉集合である．すなわち $S^b = S \cup S^a$ となる．

証明 $S \subset S^b$ は明らか．$p \in S^a$ に対して，$p \in (S \setminus \{p\})^b \subset S^b$ なので $S^a \subset S^b$．よって $S \cup S^a \subset S^b$ を得る．任意の $p \in S^b$ に対して $p \notin S$ と仮定する．このとき $S \setminus \{p\} = S$ なので $p \in S^b = (S \setminus \{p\})^b$，すなわち $p \in S^a$ となる．よって $p \in S^b$ は S か S^a のいずれかに属することになる．従って $S^b \subset S \cup S^a$ を得る． ∎

系 8.18 任意の部分集合 $S \subset E$ に対して $S^a \subset S^b$ が成り立つ．

問 8.19　系 8.18 を証明せよ．

8.4　分離公理 (Separation Axiom)

位相を定義する公理は多種類にのぼる．通常の位相空間は $\mathbf{R}^n$ のように，幾つかの分離公理を同時に満たしていることがよくある．ここでは標準的な位相の公理を紹介するにとどめる．諸公理の間の関係を調べることは格好な演習問題となるだろう．T_i-分離公理を満たす位相空間を **T_i-空間**という．

定義 8.20 (T_0-分離公理または Kolmogorov の公理)　位相空間 $(E, \mathcal{T})$ が T_0-分離公理を満たすとは，任意の $p, q \in E, p \neq q$ に対して，$q \notin U_p$ を満たす $U_p \in \mathcal{N}_p$ が存在するか，または $p \notin U_q$ を満たす $U_q \in \mathcal{N}_q$ が存在することである．

定義 8.21 (T_1-分離公理または Fréchet の公理)　位相空間 $(E, \mathcal{T})$ が T_1-分離公理を満たすとは，任意の $p, q \in E, p \neq q$ に対して，$p \notin U_q$ および $q \notin U_p$ を満たす $U_p \in \mathcal{N}_p$ と $V_q \in \mathcal{N}_q$ が存在することである．

定義 8.22 (T_2-分離公理または Hausdorff の公理)　位相空間 $(E, \mathcal{T})$ が T_2-分離公理を満たすとは，任意の $p, q \in E, p \neq q$ に対して，$U_p \cap U_q = \emptyset$ を満たす $U_p \in \mathcal{N}_p$ と $U_q \in \mathcal{N}_q$ が存在することである．この空間を **Hausdorff 空間**とよぶ．

定義 8.23 (T_3-分離公理または Vietoris の公理)　位相空間 $(E, \mathcal{T})$ が T_3-分離公理を満たすとは，任意の $p \in E$ と p を含まない任意の閉集合 $F \in \mathcal{F}$ に対して，p の近傍 $U_p \in \mathcal{N}_p$ と F を含む $V \in \mathcal{T}$ で，$U_p \cap V = \emptyset$ を満たすものが存在することである．

定義 8.24 (T_4-分離公理または Tietze の公理)　位相空間 $(E, \mathcal{T})$ が T_4-分離公理を満たすとは，共通点をもたない任意の $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ に対して，$V_1, V_2 \in \mathcal{T}$ で $F_1 \subset V_1, F_2 \subset V_2$ で，$V_1 \cap V_2 = \emptyset$ を満たすものが存在することである．

問 8.25　T_0, T_1, T_2-空間の間の位相の強弱関係 $T_0 < T_1 < T_2$ を示せ．

問 8.26　位相空間 $(E, \mathcal{T})$ に対して，T_1-分離公理は次の T_1'-分離公理と同値であることを示せ：

E の各点 p に対して，$\{p\}$ は，E の閉集合である．

問 8.27 $(E, \mathcal{T})$ が T_0 と T_3 を満たせば，任意の 2 点 $p \neq q \in E$ に対して，$q \notin U_p \in \mathcal{N}_p$ と $p \notin U_q \in \mathcal{N}_q$ で $U_p \cap U_q = \emptyset$ を満たすものが存在する (すなわち $T_0 + T_3 \Rightarrow T_2$).

[ヒント] T_0 より $q \notin U_p$ を満たす $U_p \in \mathcal{T}$ が存在する．$F := U_p^c$ とおけば，$q \in F$ が成り立つ．T_3 より，p と F に対して $V_p \in \mathcal{N}_p$ および $V(F) \in \mathcal{T}$ で $V_p \cap V(F) = \emptyset$ を満たすものが存在する．特に $q \in V(F) \in \mathcal{N}_q$ となるから，$U_p := V_p$, $U_q := V(F)$ とおけば証明終わり． ∎

問 8.28 T_1 と T_4 を満たす位相空間 $(E, \mathcal{T})$ は T_2 および T_3 を満たすことを示せ．

[ヒント] T_1 より 1 点は閉集合なので, $p \neq q \in E$ に対して, $F_1 := \{p\}$, $F_2 := \{q\}$ とおけば，$F_1 \cap F_2 = \emptyset$ となる．よって，T_4 より $F_1 \subset V_1$, $F_2 \subset V_2$ および $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ を満たす $V_1, V_2 \in \mathcal{T}$ が存在し，T_2 が成り立つ．T_3 を得るためには，任意の $p \in E$ と $p \notin F_2$ を満たす任意の $F_2 \in \mathcal{F}$ に対して，$F_1 := \{p\}$ とおけばよい． ∎

定理 8.29 位相空間 $(E, \mathcal{T})$ が T_0-空間であることは，以下と同値である：

異なる任意の 2 点 $p, q \in E$ に対して，$\{p\}^b \neq \{q\}^b$が成り立つ．

証明 もしも $p \neq q \in E$ が存在して $\{p\}^b = \{q\}^b$ が成り立ったと仮定する．この仮定は $p \in \{q\}^b$ および $q \in \{p\}^b$ と同値である．更に，これは命題 7.19 より，任意の $U_p \in \mathcal{N}_p$ と任意の $U_q \in \mathcal{N}_q$ に対して $U_p \cap \{q\} \neq \emptyset$, $U_q \cap \{p\} \neq \emptyset$ と同値である．これより，任意の $U_p \in \mathcal{N}_p$ と任意の $U_q \in \mathcal{N}_q$ に対して $q \in U_p$ および $p \in U_q$ が成り立ち，T_0-分離公理に反する． ∎

定理 8.30 位相空間 $(E, \mathcal{T})$ に対して，以下は全て同値である：

(0) E が T_1-分離公理を満たす．

(1) 任意の $p \in E$ に対して，$\bigcap\{U_p \mid U_p \in \mathcal{N}_p\} = \{p\}$.

(2) 任意の $p \in E$ に対して，$\{p\}^b = \{p\}$.

(3) 有限個の任意の $p_1, \cdots, p_n \in E$ に対して，

$$\{p_1, \cdots, p_n\}^b = \{p_1, \cdots, p_n\}.$$

証明 (0) $\Rightarrow$ (1) を示す．任意の点 $p \in E$ に対して, $S_p := \bigcap\{U_p \mid U_p \in \mathcal{N}_p\}$

とおく．もしも $q \neq p$ を満たす点 $q \in S_p$ が存在したと仮定する．T_1 より $q \notin U_p$ を満たす $U_p \in \mathcal{N}_p$ が存在し，$q \notin S_p$ となり，矛盾を生じる．

(1) ⇒ (0) を示す．仮定より $q \neq p$ ならば $q \notin S_p$ を得る．従って $q \notin U_p$ を満たす $U_p \in \mathcal{N}_p$ が存在する．今 p と q の立場を入れ替えれば，$p \notin U_q$ を満たす $U_q \in \mathcal{N}_q$ が存在する．

(1) ⇒ (2) を示す．まず，閉包作用素の定義 (2^b) から $\{p\} \subset \{p\}^b$ である．もしも p と異なる点 q で $\{p\}^b$ に含まれるものが存在すれば，命題 7.19 より，

$$q \in \{p\}^b = \bigcap \{F \mid F \in \mathcal{F},\ p \in F\}.$$

他方，(0) ⇔ (1) より p, q の近傍 $U_p \in \mathcal{N}_p, U_q \in \mathcal{N}_q$ で $p \notin U_q, q \notin U_p$ を満たすものが存在する．このとき，$F_p := (U_q)^c$ は $p \in F_p, F_p \in \mathcal{F}$ かつ $q \notin F_p$ を満たすから，$q \notin \{p\}^b$ となって矛盾である．すなわち $\{p\} = \{p\}^b$ を得る．

(2) ⇒ (1) を示すには (2) ⇒ (0) を示せば十分である．(2) より，任意の異なる 2 点 $p \neq q$ に対して $\{p\}^b \cap \{q\}^b = \emptyset$ が成り立つ．従って

$$p = \{p\}^b \subset (\{q\}^b)^c = \bigcup \{F^c \mid F \in \mathcal{F}, q \in F\}.$$

すなわち，$p \in F^c$ かつ $q \in F$ を満たす閉集合 F が存在する．$U_p := F^c$ とおけば，U_p は $p \in U_p$ かつ $q \notin U_p$ を満たす開集合で p の近傍である．同様にして，$p \notin U_q$ を満たす近傍 $U_q \in \mathcal{N}_q$ が存在し，(0) が示された．

(2) ⇒ (3) を示す．閉集合の定義から

$$\{p_1, \cdots, p_n\}^b = (\bigcup_{k=1}^{n} \{p_k\})^b = \bigcup_{k=1}^{n} \{p_k\}^b = \bigcup_{k=1}^{n} \{p_k\} = \{p_1, \cdots, p_n\}.$$

(3) ⇒ (2) は自明だろう． ∎

問 8.31　上述の (3) ⇒ (2) を示せ．

定理 8.32　位相空間 $(E, \mathcal{T})$ が T_2-分離公理を満たすことは，以下と同値である：

任意の点 $p \in E$ に対して，$S_p^b := \bigcap \{U_p^b \mid U_p \in \mathcal{N}_p\} = \{p\}$ が成り立つ．

証明　(⇒) を示す．もしも $q \in S_p^b$ を満たす点 $q \neq p$ が存在したと仮定すると，$q \in U_p^b$ が全ての $U_p \in \mathcal{N}_p$ に対して成り立つ．T_2 より $V_p \cap V_q = \emptyset$ を満たす近傍 $V_p \in \mathcal{N}_p$ と $V_q \in \mathcal{N}_q$ が存在する．従って，$V_q^c \supset V_p$ かつ V_p^b は V_p を含む最小の閉集合だから，$q \in V_p^b \subset V_q^c$ となって，これは矛盾である．

(⇐) を示す．もしも 2 点 $p \neq q \in E$ が存在して，その全ての近傍 $U_p \in \mathcal{N}_p, V_q \in \mathcal{N}_q$ に対して $U_p \cap V_q \neq \emptyset$ が満たされたと仮定する．今 U_p を任意に固定すれば，全ての近傍 $V_q \in \mathcal{N}_q$ が $V_q \cap U_p \neq \emptyset$ を満たすから，$q \in U_p^b$ となる．従って $q \in \bigcap\{U_p^b \mid U_p \in \mathcal{N}_p\} = \{p\}$．これは矛盾． ∎

定理 8.33 位相空間 $(E, \mathcal{T})$ が T_3-分離公理を満たすことは，以下と同値である：

任意の点 $p \in E$ における任意の近傍 $U_p \in \mathcal{N}_p$に対して，
$V_p^b \subset U_p$を満たす $V_p \in \mathcal{N}_p$が存在する．

証明 (⇒) を示す．$F := U_p^c$ とおけば，$F \in \mathcal{F}$ および $p \notin F$ より $V_p \cap U(F) = \emptyset$ を満たす $V_p \in \mathcal{N}_p$ と $U(F) \in \mathcal{T}$ が存在する．従って $V_p \subset U(F)^c$ だから，(4^b) より $V_p^b \subset (U(F)^c)^b = U(F)^c$ が成り立つ．故に，$p \in V_p \subset V_p^b \subset (U(F)^c)^b = U(F)^c \subset F^c = U_p$ を得る．

(⇐) を示す．任意の $p \in E$ と任意の $F \in \mathcal{F}$ に対して $p \notin F$ とする．このとき $p \in F^c \in \mathcal{T}$ となる．今 $U_p := F^c$ とおけば，仮定より $V_p^b \subset U_p = F^c$ を満たす $V_p \in \mathcal{N}_p$ が存在する．すなわち $F \subset (V_p^b)^c$ である．また，$V_p \subset V_p^b$ より $(V_p^b)^c \subset V_p^c$ となるから，$V_p \cap (V_p^b)^c = \emptyset$ を得る． ∎

定理 8.34 位相空間 $(E, \mathcal{T})$ が T_4-分離公理を満たすことは，以下と同値である：

任意の閉集合 $F \in \mathcal{F}$ と F を含む任意の開集合 $U_F \supset F$ に対して，
$V_F^b \subset U_F$を満たす $V_F \in \mathcal{T}$ が存在する．

証明 (⇒) を示す．任意の $F \in \mathcal{F}$ および任意の $U_F \in \mathcal{T}$ で $F \subset U_F$ を満たすものを与える．$F := (U_F)^c$ とおくと，T_4 の仮定から，$F \subset V_F$, $F_1 \subset V_{F_1}$ かつ $V_F \cap V_{F_1} = \emptyset$ を満たす $V_F, V_{F_1} \in \mathcal{T}$ が存在する．よって $V_F \subset (V_{F_1})^c$ だから，$V_F \subset V_F^b \subset ((V_{F_1})^c)^b = (V_{F_1})^c \subset (F_1)^c = U_F$ を得る．

(⇐) を示す．$F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ かつ $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ とせよ．このとき，$F_1 \subset F_2^c (\in \mathcal{T})$ なので，仮定より $F_1 \subset V_{F_1} \subset V_{F_1}^b \subset F_2^c$ を満たす開集合 $V_{F_1} \in \mathcal{T}$ が存在する．また，$V_{F_1}^b \subset F_2^c$ より $F_2 \subset V_{F_2} := (V_{F_1}^b)^c$ だから，$F_1 \subset V_{F_1}$ および $F_2 \subset V_{F_2}$ かつ $V_{F_1} \cap V_{F_2} = \emptyset$ を得る． ∎

8.5　コンパクト空間とコンパクト集合

位相空間 $(E, \mathcal{T})$ の部分集合族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ が

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = E$$

を満たすとき，$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ を E の**被覆**という (ここで I は添数集合)．特に，全ての A_α が開集合のとき，$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ を**開被覆**という．

位相空間 $(E, \mathcal{T})$ の点列 $\{p_n\}_{n=1,2,\cdots}$ は，与えられた点 $p \in E$ の任意の近傍 U に対して番号 N が存在して，$n \geq N$ ならば $p_n \in U$ を満たすとき，p に**収束する**という．このとき，p を $\{p_n\}$ の**極限点**という．収束しない点列 $\{p_n\}_{n=1,2,\cdots}$ を**発散点列**という．$(E, \mathcal{T})$ が Hausdorff 空間のとき，収束する点列 $\{p_n\}_{n=1,2,\cdots}$ の極限は一意的に決まる．

$(E, \mathcal{T})$ の任意の点列 $\{p_n\}_{n=1,2,\cdots}$ が収束する部分列を含むとき，$(E, \mathcal{T})$ を**点列コンパクト**という．曲面や多様体に対しては，点列コンパクト性は以下に述べる開被覆によるコンパクト性と同値になる．ここでは開被覆によるコンパクト性のみを議論する．

8.5.1　コンパクト空間

定義 8.35 (被覆コンパクト (covering compact))　$(E, \mathcal{T})$ を位相空間とする．E の任意の開被覆 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ に対して，有限個の元 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}, n < \infty$ が存在して

$$\bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i} = E \tag{C$_1$}$$

を満たすとき，$(E, \mathcal{T})$ は**コンパクト**であるという．

定義 8.36　位相空間 $(E, \mathcal{T})$ の部分集合の族 $\mathfrak{A}$ が，**有限交叉性**を持つとは，$\mathfrak{A}$ の任意の有限部分集合族 $\mathfrak{A}_0$ に対して，

$$\bigcap\{S \mid S \in \mathfrak{A}_0\} \neq \emptyset.$$

命題 8.37　位相空間 $(E, \mathcal{T})$ がコンパクトであるための必要十分条件は，有限交叉性を持つ任意の閉集合族 $\mathbb{F} = \{F_\alpha \mid F_\alpha \in \mathcal{F}, \alpha \in \Lambda\}$ に対して

$$\bigcap_{\alpha\in\Lambda} F_\alpha \neq \emptyset \tag{C$_2$}$$

が成立することである．

証明　(⇒) を示す．(C_1) かつ (C_2) でないと仮定すると，$\bigcap\{F \mid F \in \mathbb{F}\} = \emptyset$ なる有限交叉性を持つ閉集合族 $\mathbb{F}$ が存在する．今 $G_\alpha := F_\alpha^c$, $\mathbb{F} := \{F_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ とおけば，

$$\bigcup_\alpha G_\alpha = \bigcup F_\alpha^c = \Big(\bigcap_\alpha F_\alpha\Big)^c = \emptyset^c = E.$$

従って $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ は E の開被覆なので，(C_1) より $\displaystyle\bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i} = E$ を満たす $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}, n < \infty$ が存在する．故に

$$\bigcap_{i=1}^n F_{\alpha_i} = \bigcap_{i=1}^n G_{\alpha_i}^c = \Big(\bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}\Big)^c = E^c = \emptyset$$

となり，矛盾を生じる．

(⇐) を示す．(C_2) かつ (C_1) でないと仮定すると，E の開被覆 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ で，$\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ のどんな有限部分被覆をとっても E を覆うことができない．今 $F_\alpha := G_\alpha^c$, $\mathbb{F} := \{F_\alpha \mid \alpha \in \Lambda,\ F_\alpha \in \mathcal{F}\}$ とおけば，任意の有限部分被覆 $\{F_{\alpha_k}\}_{k=1}^n \subset \mathbb{F}$ をとっても，

$$\bigcap_{k=1}^n F_{\alpha_k} = \bigcap_{k=1}^n G_{\alpha_k}^c = \Big(\bigcup_{k=1}^n G_{\alpha_k}\Big)^c \neq \emptyset.$$

故に $\mathbb{F}$ は有限交叉性を持つ．よって (C_2) より $\displaystyle\bigcap_{\alpha\in\Lambda} F_\alpha \neq \emptyset$ だから，

$$\emptyset \neq \bigcap_\alpha F_\alpha = \bigcap_\alpha G_\alpha^c = \Big(\bigcup_\alpha G_\alpha\Big)^c = E^c = \emptyset$$

となり，矛盾を生じる．　■

8.5.2　コンパクト集合

定義 8.38　位相空間 $(E, \mathcal{T})$ の部分集合 $K \subset E$ が相対位相に関してコンパクト位相空間となるとき，**コンパクト集合**であるという．

命題 8.39　位相空間 $(E, \mathcal{T})$ に対して，以下が成立する：

(i)　有限個のコンパクト集合の和集合はコンパクトである．

(ii)　E がコンパクトならば，任意の $F \in \mathcal{F}$ はコンパクトである．

(iii)　E が T_2-分離公理を満たすならば，任意のコンパクト集合 $K \subset E$ は閉集合である．

証明　たとえば, (iii) を示そう. 任意のコンパクト集合 $K \subset E$ に対して, 任意の点 $p \notin K$ を固定する. 任意の点 $q \in K$ に対して, $U(p, q) \cap U(q) = \emptyset$ を満たす近傍 $U(p, q) \in \mathcal{N}_p$ と $U(q) \in \mathcal{N}_q$ が存在する. $\{U(q)\}_{q \in K}$ は K の開被覆だから, コンパクトの仮定より K の有限開被覆 $\{U(q_1), \cdots, U(q_n)\}$ がとれる. 今 $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} U(q_k) =: V(K)$ とおけば $V(K)$ は開集合である. $U_p := \bigcap_{k=1}^{n} U(p, q_k)$ とおくと, 構成方法から $U_p \in \mathcal{N}_p$ かつ $U_p \cap V(K) = \emptyset$ だから, $U_p \subset K^c$ となって, K^c は開集合であることが解る. ∎

定理 8.40　X, Y を位相空間とし, 更に X はコンパクト, $f : X \to Y$ は連続写像とする. 以下の命題が真である：

(i)　$f(X)$ は Y のコンパクト集合.

(ii)　Y が T_2-空間ならば f は閉写像である.

(iii)　Y が T_2-空間で f が全単射ならば f は同相写像である.

証明　(i) のみを証明する. $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ を $f(X)$ の任意の開被覆とする. すなわち $f(X) \subset \bigcup_{\alpha} U_\alpha$. このとき $X \subset f^{-1}(\bigcup_{\alpha} U_\alpha)$ だから, $X = f^{-1}(\bigcup_{\alpha} U_\alpha) = \bigcup_{\alpha} f^{-1}(U_\alpha)$ となり, $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ は X の開被覆となる. 従って X はコンパクトなので, 有限開被覆がとれる. すなわち, $X = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(U_{\alpha_i})$ を満たす $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ $(n < \infty)$ が存在する. $f(X)$ がコンパクトとなることは以下の包含関係で解る：

$$
\begin{aligned}
f(X) = f\Big(\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(U_{\alpha_i})\Big) &= \bigcup_{i=1}^{n} f(f^{-1}(U_{\alpha_i})) \\
&= \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \cap f(X) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}.
\end{aligned}
$$

∎

問 8.41　命題 8.39 の (i), (ii) を証明せよ.

問 8.42　定理 8.40 の (ii) と (iii) を証明せよ.

問 8.43　コンパクトな Hausdorff 空間は, T_3-空間であることを示せ.

問 8.44　コンパクトな Hausdorff 空間は, T_4-空間であることを示せ.

8.6 位相空間の連結性

位相空間 $(E, \mathcal{T})$ が連結でないことの定義を述べる．空でない 2 つの真部分集合 $A, B \subset E$ はともに開かつ閉で，

$$A \cap B = \emptyset, \qquad A \cup B = E$$

を満たすものが存在するとき，E は**非連結** (disconnected) であるという．E が非連結でないとき，E は**連結** (connected) であるという．位相空間 E の開かつ閉である部分集合が $\emptyset$ と E のみであるときに限り，E は連結である．$U \subset E$ を E の真部分集合とする．U に E の相対位相を導入して，U を位相空間とみなして U が (非) 連結のとき，U は **(非) 連結集合**であるという．E の任意の点 $x \in E$ を固定する．x を含む全ての連結集合の和は再び連結となって，x を含む最大の連結集合の存在が解る．**x を含む最大の連結集合を E の連結成分** (connected component) という．**E 内の連結な開集合を領域**という．

補題 8.45　位相空間 X の部分集合 $A \subset X$ が連結集合であるための必要十分条件は，X の開集合 U, V で

$$U \cap V = \emptyset, \qquad A \subset U \cup V, \qquad A \cap U \neq \emptyset, \qquad A \cap V \neq \emptyset$$

を満たすものが存在しないことである．

例 8.46　数直線 $\mathbf{R}$，半直線 $[0, \infty)$ および区間 $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b) は全て連結 (かつ弧状連結) である．

例 8.47　$\mathbf{S}^n$ $(n \geq 1)$ および $\mathbf{R}^n$ は連結である．$\mathbf{S}^0$ は 2 点で構成された位相空間で，非連結である．

例 8.48　区間 $[a, b]$ から $(E, \mathcal{T})$ への連続写像 $c : [a, b] \to E$ の像 $c[a, b]$ は連結である．

命題 8.49　E, F を位相空間とし，$f : E \to F$ を連続写像とする．このとき，連結集合 $A \subset E$ の像 $f(A)$ は連結である．

証明　実際，$f(A)$ が非連結ならば，定義から，空でない開かつ閉である F の真部分集合 $O_1, O_2 \subset F$ が存在して，

$$f(A) = O_1 \cup O_2, \qquad O_1 \cap O_2 = \emptyset$$

を満たす．f は連続だから，$f^{-1}(O_1)$, $f^{-1}(O_2)$ はともに A の相対位相に関して開集合で，

$$f^{-1}(O_1) \cup f^{-1}(O_2) = A, \qquad f^{-1}(O_1) \cap f^{-1}(O_2) = \emptyset$$

となる．明らかに $(f^{-1}(O_1))^c = f^{-1}(O_2)$, $(f^{-1}(O_2))^c = f^{-1}(O_1)$ はともに閉集合である．従って A が非連結となって矛盾を生じる．∎

問 8.50 (連続関数に関する中間値の定理)　有界閉区間 $[a, b]$ で定義された連続関数 $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ は，$f(a) < f(b)$ ならば区間 $[f(a), f(b)]$ 上の任意の値をとることを示せ．

問 8.51　$(E, \mathcal{T})$ を位相空間とし，I を添数集合 (index set) とする E の部分集合族 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ は各々の $\alpha \in I$ に対して A_α が連結で

$$\bigcap\{A_\alpha \mid \alpha \in I\} \neq \emptyset$$

を満たすとき，$\bigcup\{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ は連結であることを示せ．

問 8.52　上に述べた例 8.46, 8.47 と 8.48 を証明せよ．

8.6.1　弧状連結な位相空間

位相空間 E の任意の 2 点 $x, y \in X$ に対して連続写像 $c : [0, 1] \to E$ で，$c(0) = x$, $c(1) = y$ を満たすものが存在するとき，E は**弧状連結** (arcwise connected) であるという．この連続写像 c を x と y を結ぶ**道** (path) という．連結な位相空間は必ずしも弧状連結でない．

例 8.53 (sinusoid)　集合 $S \subset \mathbf{R}^2$ を

$$S := \left\{ \left(x, \sin\frac{1}{x} \right) \,\middle|\, 0 < x \leq 1 \right\} \cup \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$$

とおく．このとき S は連結であるが弧状連結ではない [Figure 8.6.1].

実際，S が非連結と仮定すると，$S = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ を満たす空でない開かつ閉な S の真部分集合が存在する．A が $p := \left(0, \dfrac{1}{2}\right) \in S$ を含むとせよ．A は相対位相に関して開集合だから，十分小さい $\varepsilon > 0$ が存在して，$\mathbf{R}^2$ における p を中心とする ε-球 $B(p, \varepsilon)$ で $B(p, \varepsilon) \cap S \subset A$ が成り立つ．このとき，十分大きな正数 N_0 で

$$p_n := \left(\frac{6}{(6n+1)\pi}, \frac{1}{2} \right) \in S \cap B_\varepsilon(p) \qquad (|n| > N_0)$$

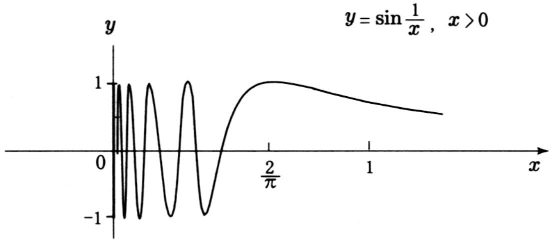


Figure 8.6.1

を満たすものが存在する．S を $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ に制限して得られた S の部分集合は p_n を含み，連続写像による像だから命題 8.49 によって連結である．従ってこれは A に含まれる．同様にして，S を $\left[-1, -\frac{1}{n}\right]$ に制限して得られた S の部分集合は p_{-n} を含み，連続写像による像だから連結である．故に $B = \emptyset$ となって仮定に反する．

S が弧状連結でないことの証明は，p と p_n を結ぶ S 内の連続曲線が存在しないことから解る．

補題 8.54　弧状連結な位相空間は連結である．

命題 8.55　$\mathbf{R}^n$ の領域は弧状連結である．連結な曲面 (多様体)M は弧状連結である．

証明　M 上の点 p_0 を固定し，p_0 と道で結べる点全体の集合を $M(p_0)$ と書く．すなわち，

$$M(p_0) := \{x \in M \mid c : [0,1] \to M \text{ で } c(0) = p_0, c(1) = x \text{ を満たす連続写像 } c \text{ が存在する}\}.$$

このとき，p_0 を含む座標近傍 (U, φ) が存在して，p_0 の近傍の点は $M(p_0)$ に属する．従って $M(p_0) \neq \emptyset$ が解る．更に $M(p_0)$ は開かつ閉であることはほとんど明らかである．このようにして $M(p_0) \neq \emptyset$ で開かつ閉である．仮定より M が連結だから，$M = M(p_0)$ が成り立つ．　■

8.6.2　単連結な位相空間と n 重連結な位相空間

X, Y を 2 つの位相空間とし，$g, h : X \to Y$ を連続写像とする．連続写像 $F : X \times [0, 1] \to Y$ の各々の $t \in [0, 1]$ に対して $f_t : X \to Y$ を $f_t(x) :=$

$F(x,t)\,(x \in X)$ と定義する．この f_t が $t \in [0,1]$ に関して連続で，

$$f_0 = g, \qquad f_1 = h$$

を満たすとき，F(または $f_t\,;\,0 \leq t \leq 1$) を g から h への**ホモトピー**という．このとき，g と h は**ホモトピック**であるという．ホモトピックな関係は同値類を定義する．X から Y への連続写像全体の集合を Y^X と書く．Y^X にコンパクト開位相を導入して位相空間とみなし，この空間を**写像空間**とよぶ．

定義 8.56 (コンパクト開位相 (compact open topology))　X, Y を位相空間とし，$K \subset X$ をコンパクト集合，$U \subset Y$ を開集合とするとき，

$$W(K,U) := \{f \in Y^X \mid f(K) \subset U\}$$

を Y^X の開集合と定義して，Y^X に位相を導入する．この位相を**コンパクト開位相**という．

以下の補題はコンパクト開位相の定義から明らかだろう．

補題 8.57　コンパクト開位相に関して，f から g へのホモトピー $F : X \times [0,1] \to Y$ は f と g を結ぶ Y^X 内の道である．

単連結および可縮な位相空間を定義しよう．n 次元球面から X への写像空間 $X^{\mathbf{S}^n}$ が弧状連結のとき，X は **n-連結** (n-connected) であるという．特に X が 0-連結のとき ($\mathbf{S}^0$ が 2 点集合であることに注意して)，$X^{\mathbf{S}^0}$ は X の任意の 2 点を結ぶ道全体の集合を表わすから，X は弧状連結である．**X が 1-連結のとき，X は単連結**であるという．X が単連結のとき，X の任意の閉曲線 γ は γ の 1 点 p にホモトピックである．すなわち，γ は X 上で連続的変形によって 1 点に縮めることができる．実際，定点写像 $f : \mathbf{S}^1 \to X$, $f(\mathbf{S}^1) := p$ と γ は $X^{\mathbf{S}^1}$ の 2 点で，弧状連結性から $X^{\mathbf{S}^1}$ 内の道で結ばれる．X^X が弧状連結のとき，**X は可縮**であるという．X が可縮であるとき，X の恒等写像が定点写像にホモトピックである．すなわち，可縮な X は X 自身を連続的変形によって 1 点に縮めることができる．X が可縮であれば，任意の $n \geq 1$ に対して X は n-連結である．

例 8.58　$\mathbf{R}^n$, $n \geq 1$ は可縮である．$\mathbf{S}^n$ は $n > k$ を満たす k に対して k-連結であるが，n-連結でない．実際，$\mathbf{S}^k \subset \mathbf{S}^n$ は $\mathbf{S}^{k+1} \subset \mathbf{S}^n$ 内の赤道とみなして，$\mathbf{S}^{k+1}$ 内の子午線に沿って赤道を北極に連続変形できる．従って $(\mathbf{S}^n)^{\mathbf{S}^k}$ は

弧状連結である．

問 8.59　補題 8.54 を証明せよ．

問 8.60　例 8.58 で述べた $\mathbf{R}^n$, $n \geq 1$ は可縮であることを証明せよ．

問 8.61　補題 8.57 を証明せよ．

8.7　道の空間のホモトピー

X は弧状連結な位相空間とし，X の 2 点 x, y を結ぶ道全体の集合を Ω_{xy} と書く．$c_0, c_1 \in \Omega_{xy}$ に対して以下の条件を満たす連続写像 $F : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ が存在するとき，c_0 と c_1 は**ホモトピック**であるという：

(1)　各々の $t \in [0, 1]$ に対して $F_t(s) := F(s, t)$ とおくと，$F_t \in \Omega_{xy}$ である．

(2)　$t \mapsto F_t$ は Ω_{xy} 内の c_0 と c_1 を結ぶ道である．

写像 F を c_0 から c_1 への**ホモトピー**という．$x = y$ の場合，$\Omega_x := \Omega_{xx}$ を**ループ空間**という．$c \in \Omega_x$ を x を基点とする**ループ**という．基点 x の定点写像 $e : [0, 1] \to X$ を $e(s) := x \, (\forall s \in [0, 1])$ と定義する．e にホモトピックなループは連続的変形で x に縮められる．

$c_0, c_1 \in \Omega_x$ がホモトピックなとき

$$c_0 \simeq c_1$$

と書く．"$\simeq$" は同値関係を定義することが解る．すなわち，任意の c が自分自身にホモトピックであることは，ホモトピー写像 $F : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ を $F(s, t) := c(s) \, (\forall s, t \in [0, 1])$ と定義すればよい．$c, d \in \Omega_x$ に対して $c \simeq d$ ならば $d \simeq c$ を示す．c から d へのホモトピー写像を $F : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ とするとき，$\widetilde{F} : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ を $\widetilde{F}(s, t) := F(s, 1-t)$ とおけば，$\widetilde{F}$ は d から c へのホモトピーを定義する．最後に，$f, g, h \in \Omega_x$ が $f \simeq g$ かつ $g \simeq h$ ならば $f \simeq h$ を示そう．f から g へのホモトピーを F とし，g から h へのホモトピーを G とする．$H : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ を

$$H(s, t) := \begin{cases} F(s, 2t) & t \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right], \\ G(s, 2t-1) & t \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \tag{8.7.1}$$

と定義すると，H は f から h へのホモトピーである．故に "$\simeq$" は**同値類**を定

める．

定義 8.62　Ω_x の "$\simeq$" による同値類を**ホモトピー類** (homotopy class) という．

問 8.63　(8.7.1) で定義された H が連続写像であることを確認せよ．

さて，$x, y, z \in X, \sigma \in \Omega_{xy}, \tau \in \Omega_{yz}$ とする．σ と τ を繋いで，x から z への新しい道 $\sigma * \tau \in \Omega_{xz}$ を以下のように定義する：

$$\sigma * \tau(s) := \begin{cases} \sigma(2s) & 0 \leq s \leq \dfrac{1}{2}, \\ \tau(2s-1) & \dfrac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases} \tag{8.7.2}$$

補題 8.64　もしも $\sigma_0, \sigma_1 \in \Omega_{xy}$ と $\tau_0, \tau_1 \in \Omega_{yz}$ が $\sigma_0 \simeq \sigma_1$ かつ $\tau_0 \simeq \tau_1$ ならば

$$\sigma_0 * \tau_0 \simeq \sigma_1 * \tau_1$$

が成り立つ．

証明　$F, G : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ をそれぞれ σ_0 から σ_1 への，τ_0 から τ_1 へのホモトピーとする．このとき，$\sigma_0 * \tau_0$ から $\sigma_1 * \tau_1$ へのホモトピーを

$$H(s, t) := \begin{cases} F(2s, t) & 0 \leq s \leq \dfrac{1}{2}, \\ G(2s-1, t) & \dfrac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

と定義できる [Figure 8.7.1]．∎

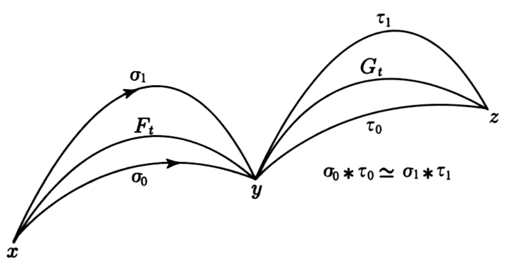


Figure 8.7.1

特に $x = y = z$ のとき，x を基点とするループ空間 Ω_x の同値類を $\Pi_1(X, x)$ と書くと，この補題は $\Pi_1(X, x)$ に**積作用**が定義されることを示す．

定理 8.65 $f,\, g \in \Omega_x$ の属する同値類を $[f],\, [g]$ とし，同値類の積を

$$[f] \cdot [g] := [f * g]$$

と定義すると，$\Pi_1(X,\, x)$ はこの積に関して群となる．このとき，定点写像 e の同値類 $[e]$ が群 $\Pi_1(X,\, x)$ の単位元で，$[f]$ の逆元は f のパラメータを逆にしたループ：

$$f^{-1}(s) := f(1-s) \qquad (0 \le s \le 1)$$

の同値類 $[f^{-1}]$ が対応する．

証明 まず，積の結合律を示そう．$f,\, g,\, h \in \Omega_x$ の同値類を $[f],\, [g],\, [h]$ とするとき，$(f*g)*h \simeq f*(g*h)$ が示されれば同値類の定義から $([f]\cdot[g])\cdot[h] = [f]\cdot([g]\cdot[h])$ が従う．構成方法から

$$(f*g)(s) = \begin{cases} f(2s) & 0 \le s \le \dfrac{1}{2}, \\ g(2s-1) & \dfrac{1}{2} \le s \le 1, \end{cases}$$

$$\Longrightarrow (f*g)*h(s) = \begin{cases} (f*g)(2s) & 0 \le s \le \dfrac{1}{2}, \\ h(2s-1) & \dfrac{1}{2} \le s \le 1. \end{cases}$$

従って $(f*g)*h \,:\, [0,\, 1] \to X$ は

$$(f*g)*h(s) = \begin{cases} f(4s) & 0 \le s \le \dfrac{1}{4}, \\ g(4s-1) & \dfrac{1}{4} \le s \le \dfrac{1}{2}, \\ h(2s-1) & \dfrac{1}{2} \le s \le 1, \end{cases}$$

同様にして，

$$f*(g*h)(s) = \begin{cases} f(2s) & 0 \le s \le \dfrac{1}{2}, \\ g(4s-2) & \dfrac{1}{2} \le s \le \dfrac{3}{4}, \\ h(4s-3) & \dfrac{3}{4} \le s \le 1 \end{cases}$$

を得る．この 2 つの道 $(f*g)*h$ と $f*(g*h)$ をホモトピー H で結ぶには $H \,:\, [0,\, 1] \times [0,\, 1] \to X$ を以下のように定める：

st-平面の原点 O を頂点とする正方形 $OABC$ を $A = (1,\, 0)$, $B = (1,\, 1)$, $C =$

(0, 1) とし，$t = 0$ に対応する道 $(f * g) * h$ の定義域は OA 上，$t = 1$ に対応する道 $f * (g * h)$ の定義域は CB 上にあるとせよ．$E = \left(\frac{1}{4}, 0\right)$, $M = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $N = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $F = \left(\frac{3}{4}, 1\right)$ として，OE, EM, MA に f, g, h が対応し，CN, NF, FB に f, g, h がそれぞれ対応しているとせよ [Figure 8.7.2].

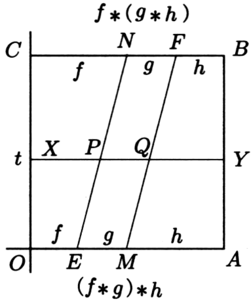


Figure 8.7.2

H_t, $t \in (0, 1)$ の定義域は $X := (0, t)$, $Y := (1, t)$ を結ぶ線分で，この線分と EN, MF との交点を $P := \left(\frac{1+t}{4}, t\right)$, $Q := \left(\frac{2+t}{4}, t\right)$ とする．このとき，XP, PQ, QY は H_t によってそれぞれ f, g, h に写像されるように H を構成すると

$$H(s,t) := \begin{cases} f\left(\dfrac{4s}{1+t}\right) & s \in \left[0, \dfrac{1+t}{4}\right], \\ g(4s - t - 1) & s \in \left[\dfrac{1+t}{4}, \dfrac{2+t}{4}\right], \\ h\left(\dfrac{4s-t-2}{2-t}\right) & s \in \left[\dfrac{2+t}{4}, 1\right] \end{cases}$$

を得る．明らかにこの H は連続で，$H_0 = (f * g) * h$, $H_1 = f * (g * h)$ を満たす．

次に，基点の定点写像 e と任意の道 $f \in \Omega_x$ に対し，$e * f \simeq f * e \simeq f$ を示す．定義によって

$$e * f(s) = \begin{cases} e(2s) & s \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right], \\ f(2s-1) & s \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

求めるホモトピー $H : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ の定義域を正方形 $OABC$ とせよ．

$M := \left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ とおいて，辺 OA が $e * f$ の定義域で，OM, MA に e, f が対応し，辺 CB が f の定義域とする．$X := (0, t)$, $Y := (1, t)$ として，XY と CM の交点を $R := \left(\dfrac{1-t}{2}, t\right)$ とせよ．H_t の定義域 XY の分割 XR, RY が e, f に対応するように H_t を構成すると以下のようになる：

$$H(s, t) := \begin{cases} e\left(\dfrac{2s}{1-t}\right) & s \in \left[0, \dfrac{1-t}{2}\right], \\ f\left(\dfrac{2s+t-1}{t+1}\right) & s \in \left[\dfrac{1-t}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

まったく同じ方法で $f * e \simeq f$ が示される．故に $[e]$ が単位元であることが示された [Figure 8.7.3].

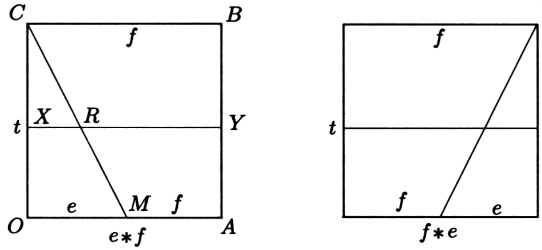


Figure 8.7.3

最後に，$f \in \Omega_x$ に対して $[f]$ の逆元 $[f]^{-1}$ が $[f^{-1}]$ であることを示す．このために，$f * f^{-1} \simeq e \simeq f^{-1} * f$ を証明すればよい．正方形 $\square(OABC)$ の辺 OA 上に定点写像 e が，辺 BC 上に $f * f^{-1}$ が対応しているとせよ．$N := \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ として，CN には f が，NB には f^{-1} が対応しているとせよ．ここで，

$$f * f^{-1} = \begin{cases} f(2s) & s \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right], \\ f^{-1}(2s-1) & s \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

$f * f^{-1}$ から e へのホモトピー $H : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ は各 $t \in [0, 1]$ に対して $H_t \in \Omega_x$ は $f|_{[0,t]}$ まで進み，その道を引き返せばよい．$X := (0, t)$, $Y := (1, t)$ として，XY と ON, AN の交点を $P := \left(\dfrac{t}{2}, t\right)$, $Q := \left(\dfrac{2-t}{2}, t\right)$ とせよ．H_t の定義域 XY の分割 XP, PQ, QY はそれぞれ f, $f\left(\dfrac{t}{2}\right) = f^{-1}\left(\dfrac{1-t}{2}\right)$, f^{-1} に対応するように H_t を定めると以下を得る [Figure 8.7.4]：

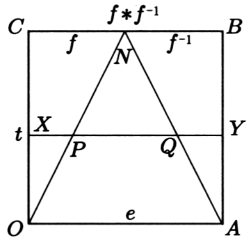


Figure 8.7.4

$$H(s,\,t) := \begin{cases} f(2s) & s \in \left[0,\, \frac{t}{2}\right], \\ f(t) = f^{-1}(1-t) & s \in \left[\frac{t}{2},\, \frac{2-t}{2}\right], \\ f^{-1}(2s-1) & s \in \left[\frac{2-t}{2},\, 1\right]. \end{cases}$$

$H_0 = e,\ H_1 = f * f^{-1}$ は明らかである．同様にして $f^{-1} * f \simeq e$ も示される．

∎

8.8　基本群と被覆空間

ここでは弧状連結な位相空間のみを考える．$\mathbf{S}^1$ の $\mathbf{R}$ への展開を例にとって基本群と (普遍) 被覆空間のおおまかな説明を試みる．詳しい証明は省く．

定義 8.66　$\Pi_1(X,\,x)$ を x を基点とする**基本群**という．

弧状連結な位相空間 X, Y と連続写像 $f : X \to Y$ が与えられたとき，f を用いて基本群の準同型写像 (homomorphism)

$$f_* : \Pi_1(X,\,x_0) \longrightarrow \Pi_1(Y,\,y_0), \qquad f(x_0) = y_0$$

を作りたい．もしも $c_0, c_1 \in \Omega_{x_0}$ がホモトピックならば，$f \circ c_0 \in \Omega_{y_0}$ から $f \circ c_1 \in \Omega_{y_0}$ へのホモトピーが $f \circ H$ で与えられる．ここに，$H : [0,\,1] \times [0,\,1] \to X$ は c_0 から c_1 へのホモトピーである．よって $f_*[c] := [f \circ c]$ とおくと，写像

$$f_* : \Pi_1(X,\,x_0) \longrightarrow \Pi_1(Y, y_0), \qquad f(x_0) = y_0$$

は代表元のとり方に無関係に決まる．このとき，

$$f_*([c] \cdot [d]) = f_*[c] \cdot f_*[d] \qquad (c,\,d \in \Omega_{x_0})$$

となるから f_* は準同型である．ここに，ドット "$\cdot$" は基本群の演算である．更に，以下の主張が成り立つ：

(i) $\mathrm{id}_X : X \to X$ に対して $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\Pi_1(X, x_0)}$.

(ii) $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を連続写像に対して $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

(iii) 2つの連続写像 $f, g : X \to Y$ がホモトピックならば，$f_* = g_*$.

問 8.67 上の主張を証明せよ．

命題 8.68 もしも $f : X \to Y$ が同相写像ならば，

$$f_* : \Pi_1(X, x_0) \longrightarrow \Pi_1(Y, y_0), \qquad f(x_0) = y_0$$

は同型写像である．

証明 $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$ および $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$ より

$$f_* \circ (f^{-1})_* = (f \circ f^{-1})_* = (\mathrm{id}_Y)_*, \qquad (f^{-1})_* \circ f_* = \mathrm{id}_{\Pi_1(X, x_0)}.$$

これより $f_* : \Pi_1(X, x_0) \to \Pi_1(Y, y_0)$ は全単射になる．従って f_* は同型写像である． ∎

問 8.69 連続写像 $f : X \to Y$ が $f \circ f^{-1} \simeq \mathrm{id}_Y$, $f^{-1} \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ ならば，f_* は同型写像であることを示せ．

弧状連結な位相空間 X の基本群 $\Pi_1(X, x_0)$ の基点を別の点 x_1 に変更することができる．

命題 8.70 弧状連結な X の任意の2点 $x_0, x_1 \in X$ に対して

$$\Pi_1(X, x_0) \simeq \Pi_1(X, x_1) \qquad (\text{同型})$$

が成立する．

証明 任意の2点 $x_0, x_1 \in X$ を結ぶ曲線を $\gamma : [0, 1] \to X$, $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$ とせよ．基本群の対応 $\gamma_\sharp : \Pi_1(X, x_0) \to \Pi_1(X, x_1)$ を γ を用いて [Figure 8.8]：

$$\gamma_\sharp[c] := [\gamma^{-1} * c * \gamma] \qquad (c \in \Omega_{x_0})$$

とおけば，$c_1, c_2 \in \Omega_{x_0}$ に対して $c_1 \simeq c_2$ ならば $\gamma^{-1} * c_1 * \gamma \simeq \gamma^{-1} * c_2 \gamma$ となって，代表元の選び方には無関係である．次に，

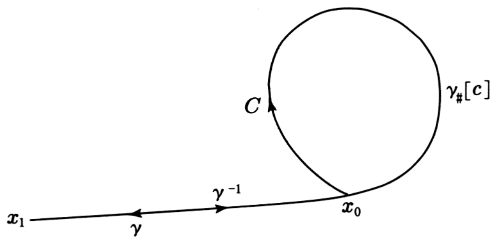


Figure 8.8

$$\begin{aligned}\gamma_\sharp([c_1]\cdot[c_2]) = \gamma_\sharp[c_1 * c_2] &= [\gamma^{-1} * c_1 * c_2 * \gamma] \\ &= [\gamma^{-1} * c_1 * \gamma * \gamma^{-1} * c_2 * \gamma] \\ &= \gamma_\sharp[c_1]\cdot\gamma_\sharp[c_2]\end{aligned}$$

だから準同型写像である．最後に $\gamma_\sharp$ が全単射を示せば同型になる．∎

問 8.71　$\gamma_\sharp : \Pi_1(X, x_0) \to \Pi_1(Y,\, y_0)$ が全単射であることを示せ．

定義 8.72 (レトラクト)　位相空間 X から部分集合 $A \subset X$ への連続写像 $f : X \to A$ が存在して，

$$f|_A = \mathrm{id}_A$$

を満たすとき，A を X の**レトラクト** (retract)，f を**引き込み** (retraction) という．

問 8.73　A を X のレトラクトとする．$a \in A$ として，

$$\Pi_1(X, a) \simeq \Pi_1(A, a)$$

が成り立つことを示せ．

例 8.74　単位円周 $\mathbf{S}^1 \subset \mathbf{R}^2$ 上の点を $a \in \mathbf{S}^1$ とする．このとき，

$$\Pi_1(\mathbf{R}^2 \setminus \{O\},\, a) \simeq \Pi_1(\mathbf{S}^1,\, a) \simeq \mathbb{Z}$$

が成り立つ．ここに O は $\mathbf{R}^2$ の原点を表わす．実際，$f : \mathbf{R}^2 \setminus \{O\} \to \mathbf{S}^1$ を

$$f(\mathbf{x}) := \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \qquad (\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 \setminus \{O\})$$

とおく．ここで f から $\mathrm{id}_{\mathbf{R}^2\setminus\{O\}}$ へのホモトピーを

$$H(\mathbf{x},\, s) := (1-s)\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} + s\mathbf{x} \qquad (\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 \setminus \{O\},\ 0 \le s \le 1)$$

によって定義すると，

$$f_* = (\mathrm{id}_{\mathbf{R}^2\setminus\{O\}})_* \ : \Pi_1(\mathbf{R}^2 \setminus \{O\},\, a) \longrightarrow \Pi_1(\mathbf{S}^1,\, a)$$

は全単射で準同型だから，f_* は同型となる．従って

$$\Pi_1(\mathbf{R}^2 \setminus \{O\},\, a) \simeq \Pi_1(\mathbf{S}^1,\, a) \simeq \mathbb{Z}.$$

$\Pi_1(\mathbf{S}^1,\, a)$ が無限巡回群となる事実は以下 8.8.1 節に述べる $\mathbf{S}^1$ の $\mathbf{R}$ への展開で解説する．

例 8.75　簡単な空間の基本群の例をあげる．

(i)　$\Pi_1(\mathbf{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$，円柱面の基本群は $\mathbb{Z}$ である．

(ii)　$n \geq 2$ のとき，$\Pi_1(\mathbf{S}^n) \simeq \{1\}$.

(iii)　$\Pi_1(\mathbf{R}^n) \simeq \{1\}$.

(iv)　回転トーラスの基本群は $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ である．

ここに，$\{1\}$ は単位元のみからなる自明な群を表わす．

定義 8.76　X, E を位相空間とする．写像 $\pi : E \to X$ が以下の性質をもつとき，E を X の**被覆空間** (covering space of X)，π を**被覆写像** (covering map) という：

X の各点 x のまわりの開近傍 U_x が存在して，$\pi^{-1}(U_x)$ が互いに交わらない開集合たちの和集合で表され，$\pi^{-1}(U_x)$ の各々の連結成分 S_i について $\pi|_{S_i} : S_i \to U_x$ は同相写像である．特に E が単連結のとき，E を**普遍被覆空間** (universal covering space) という．

問 8.77　被覆写像 $\pi : E \to X$ は以下の性質を持つことを証明せよ：

(i)　$\pi : E \to X$ は全射である．

(ii)　π は局所同相写像である．

(iii)　π は開写像である．

(iv)　任意の $x_1, x_2 \in X$ に対して $\pi^{-1}(x_1)$ から $\pi^{-1}(x_2)$ への全単射が存在する．

(v)　各点 $x \in X$ に対して $\pi^{-1}(x)$ は孤立点集合である．

8.8.1　$\mathbf{S}^1$ の $\mathbf{R}$ への展開

弧状連結な位相空間 X とその普遍被覆空間 $\widetilde{X}$ の関係と，X の基本群 $\Pi_1(X)$ が普遍被覆空間に被覆変換群として作用する様子を，最も単純な例について説明しよう．すなわち，1 次元完備 Riemann 多様体 $\mathbf{S}^1$, $\mathbf{R}$ について，$\mathbf{S}^1$ を $\mathbf{R}$ に等長的に展開する操作を見る．

xy-平面の x 軸を $\mathbf{R}$ と同一視する．単位円 $\mathbf{S}^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ の中心を点 $(0, 1)$ に平行移動したものを $\mathbf{S}^1(0)$ と表わす．この $\mathbf{S}^1(0)$ を x 軸に接しながら滑ることなく転がして，中心が点 $(\theta, 1)$ の単位円 $\mathbf{S}^1(\theta)$ まで移動させたとする．$\theta \in [0, 2\pi)$ として，$\mathbf{S}^1(0)$ と x 軸の接点 $(0, 0)$ から測った $\mathbf{S}^1(0)$ 上の有向弧長が $\theta \in [0, 2\pi)$ となる点 $p = p(\theta) \in \mathbf{S}^1(0)$ が $\mathbf{S}^1(\theta)$ と x 軸との接点となる．$\mathbf{S}^1(\theta)$ と x 軸との接点 $(\theta, 0)$ を介して $p(\theta)$ のまわりの $\mathbf{S}^1(0)$ の近傍が x 軸上の点 $(\theta, 0)$ のまわりの近傍に**等長的**に対応し，この対応が 2π を周期として現われることが解る．このとき，$p(\theta) \in \mathbf{S}^1(0)$ は [Figure 8.8.1]：

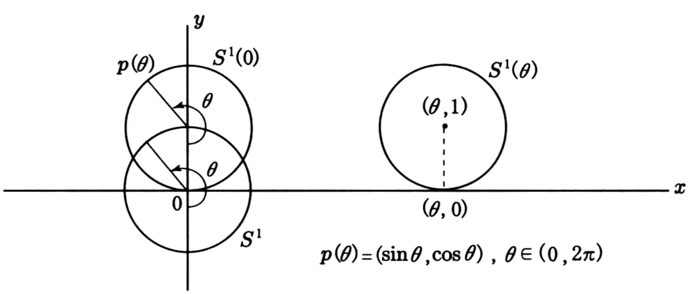


Figure 8.8.1

$$p(\theta) = \left(\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + 1\right)$$
$$= (\sin\theta,\ \cos\theta + 1) \qquad (\theta \in [0, 2\pi))$$

である．更に，$p(0) = (0, 0)$ が x 軸と接する点は $\{(2n\pi, 0) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ である．$\mathbf{R}$ 上の任意の点 $u \in \mathbf{R}$ に対して，整数 $n \in \mathbb{Z}$ と $\theta \in [0, 2\pi)$ が一意的に存在して，

$$u = 2n\pi + \theta$$

を満たす．従って $u \in \mathbf{R}$ において接する $\mathbf{S}^1(u)$ の接点は $\mathbf{S}^1(0)$ 上では $p(\theta)$ で

あって，この対応を用いて被覆写像

$$\pi : \mathbf{R} \to \mathbf{S}^1, \qquad \pi(u) := p(\theta)$$

が定義される．

命題 8.78 $\pi : \mathbf{R} \to \mathbf{S}^1$ は普遍被覆写像である．

証明 任意の点 $p(\theta) \in \mathbf{S}^1(0)$ のまわりの $\dfrac{3\pi}{4}$-球 $V(p(\theta))$, $(\theta \in [0,\, 2\pi))$ を

$$V(p(\theta)) := \left\{ p(v) \;\middle|\; \theta - \frac{3\pi}{4} < v < \theta + \frac{3\pi}{4} \right\} \qquad (\mathrm{mod}\, 2\pi)$$

と表わす．このとき

$$\pi^{-1}(V(p(\theta))) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(2n\pi + \theta - \frac{3\pi}{4},\, 2n\pi + \theta + \frac{3\pi}{4} \right)$$

となって，右辺は互いに素な和集合で，各成分 $\left(2n\pi + \theta - \dfrac{3\pi}{4},\, 2n\pi + \theta + \dfrac{3\pi}{4} \right)$ は π によって $V(p(\theta))$ に**等長的**に対応する．故に π は被覆写像である．

$\mathbf{R}$ は可縮であるから，$\mathbf{R}$ は単連結である．従って $\pi : \mathbf{R} \to \mathbf{S}^1$ は普遍被覆写像で，$\mathbf{R}$ は $\mathbf{S}^1$ の普遍被覆空間となる． ∎

命題 8.79 $\mathbf{S}^1$ の基本群は $\Pi_1(\mathbf{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$ である．

証明 $\mathbf{S}^1$ の点 $p_0 := (0,\, -1)$ を基点とする $\mathbf{S}^1$ のループ空間を Ω_{p_0} と書く．任意のループ $c \in \Omega_{p_0}$ を y 軸に沿って平行移動し，$\mathbf{S}^1(0)$ 上の原点 $(0,\, 0)$ を基点とするループとみなして再び同じ記号で表わす．このとき，c に対応する $\mathbf{R}$ の曲線 $\widetilde{c} : [0,\, 1] \to \mathbf{R}$ を

$$\widetilde{c}(0) := c(0) = (0,\, 0), \qquad \pi \circ \widetilde{c}(t) = c(t) \qquad (t \in [0,\, 1])$$

を満たすように構成する．この $\widetilde{c}$ を c の**リフト**という．

リフトの構成にさいし，$\mathbf{S}^1(0)$ 上の 2 点 $(0,\, 0)$ および $(0,\, 2)$ のまわりの $\dfrac{3\pi}{4}$-球をそれぞれ $V(p(0))$, $V\left(p\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right) \subset \mathbf{S}^1(0)$ とおく．

明らかに $\mathbf{S}^1(0) \subset V(p(0)) \cup V\left(p\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ だから $[0,\, 1]$ の分割 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$ が各々の $i = 1, \cdots, N$ に対して以下の条件を満たすようにとれる：

(i) $c[t_{i-1},\, t_i] \subset V(p(0))$ または $c[t_{i-1},\, t_i] \subset V\left(p\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ が成り立つ．

(ii) もしも $c[t_{i-1},\, t_i] \subset V(p(0))$ ならば，$c[t_i,\, t_{i+1}] \subset V\left(p\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ が成り立つ．

(iii)　もしも $c[t_{i-1}, t_i] \subset V\left(p\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ ならば，$c[t_i, t_{i+1}] \subset V(p(0))$ が成り立つ．

このような分割の存在は c の連続性によって保証される [Figure 8.8.2].

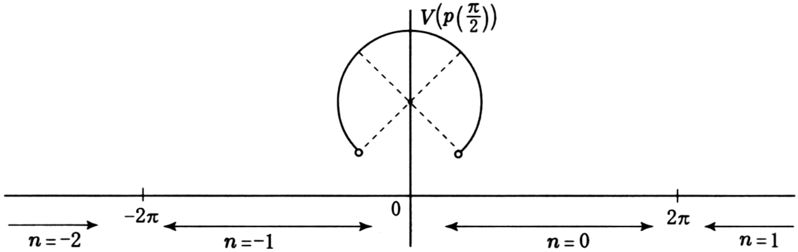


Figure 8.8.2

$\widetilde{c} : [0, 1] \to \mathbf{R}$ を以下のように構成する：

$i = 1$ のとき，$t \in [t_0, t_1]$ に対して

$$\widetilde{c}(t) := \left(\pi|_{\left(\frac{-3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)}\right)^{-1} \circ c(t), \qquad c[t_0, t_1] \subset V(p(0)).$$

$i = 2$ のとき，$t \in [t_1, t_2]$ に対して $\widetilde{c}$ を定義するさいに，パラメータ t_1 において $\widetilde{c}$ の連続性を確保するためには，$\widetilde{c}(t_1)$ を含む開区間を $\pi^{-1}\left(V\left(p\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\right)$ から一意的に選んで

$$\widetilde{c}(t) := \begin{cases} \left(\pi|_{\left(\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)}\right)^{-1} \circ c(t) & \text{もしも} \quad \widetilde{c}(t_1) \in \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right), \\ \left(\pi|_{\left(\frac{-7\pi}{4}, \frac{-\pi}{4}\right)}\right)^{-1} \circ c(t) & \text{もしも} \quad \widetilde{c}(t_1) \in \left(\dfrac{-7\pi}{4}, \dfrac{-\pi}{4}\right) \end{cases}$$

とすればよい．以下，帰納的に各々の部分弧 $c[t_{i-1}, t_i]$ に対して整数 $n \in \mathbb{Z}$ を選んで $\widetilde{c}$ が t_i において連続となるようにできる．このようにして c のリフトが構成された．

最後に $\mathbf{S}^1$ の基本群が無限巡回群であることを調べよう．各々の $c \in \Omega_{p_0}$ に対して，c のリフトが $\widetilde{c}(1) = (2n\pi, 0)$ を満たす整数 $n \in \mathbb{Z}$ が一意的に定まる．$\mathbf{R}$ の単連結性から $c \in \Omega_{p_0}$ とホモトピックなループの $\mathbf{R}$ へのリフトは $(2n\pi, 0)$ をその端点とする．逆に $\mathbf{R}$ の線分 $[0, 2n\pi]$ の π による像は $\mathbf{S}^1$ を n 回まわって得られた Ω_{p_0} に属するループである．展開の構成方法から，$\Pi_1(\mathbf{S}^1)$ の群としての積が 2 つのループの $\mathbf{S}^1$ をまわった回数の和であり，整数の加法と群の演算が対応していることは明らかである．よって，$\Pi_1(\mathbf{S}^1)$ は無限巡回群で $\Pi_1(\mathbf{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$ となる．∎

上に証明で述べた c のリフト $\widetilde{c}$ の存在は，被覆空間に対して成立する一般的な事実である．

命題 8. 80 (lifting property) E を X の被覆空間とし，$\pi : E \to X$ を被覆写像とせよ．$p \in E$ と $x \in X$ が $\pi(p) = x$ を満たすとき，以下が成り立つ：

(i) x を始点とする道 $c : [0, 1] \to X$ に対して，$p \in E$ を始点とする道 $\widetilde{c} : [0, 1] \to E$ で，

$$\pi \circ \widetilde{c}(t) = c(t) \qquad (t \in [0, 1])$$

を満たすものが一意的に存在する．

(ii) ホモトピー $H : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ が $H(0, 0) = x$ をみたすとき，ホモトピー $\widetilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \to E$ で

$$H = \pi \circ \widetilde{H}, \qquad \widetilde{H}(0,0) = p$$

を満たすものが一意的に存在する．

第9章　Riemann幾何学からの準備

滑らかな多様体 M 上に第 1 基本形式 $g = \sum g_{ij} du^i du^j$ が与えられたとき，(M, g) を Riemann 多様体という．$\mathbf{R}^3$ 内の曲面は 2 次元 Riemann 多様体である．$\mathbf{R}^3$ 内の曲面上で第 1 基本形式のみを用いて議論を展開するのが 2 次元 Riemann 多様体の考え方である．従って第 2 基本形式は，(M, g) を他の Riemann 多様体の部分多様体と考えないかぎり，Riemann 幾何には登場しない．第 6 章で議論した Gauss-Bonnet の定理は曲面の位相不変量を曲率積分で記述した，Riemann 幾何学と位相数学を結びつける重要な定理である．このように曲面 (2 次元 Riemann 多様体) の局所的性質を全体に集約して曲面の大域的性質を導くことがきわめて重要な研究課題となっている．Riemann 多様体を距離空間としてとらえることは大域的研究を進める上の基本的考え方の 1 つであり，Hopf-Rinow の古典的な完備性定理を証明する．完備性定理の応用として Cohn-Vossen による完備非コンパクト 2 次元 Riemann 多様体の全曲率 (曲率積分) に関する公式とこれに関連する Huber の定理を解説する．これらの重要な結果は $\mathbf{R}^3$ 内の完備 (極小) 曲面の大域的研究にしばしば使われている．曲率積分は曲面上の等周不等式の証明にも利用されている．完備性の持つ重要な性質のひとつに測地的完備性がある．測地線に関する基本的な性質を解説し，基本弧長の存在，第 1，第 2 変分公式を証明する．これらの議論を応用して W.S.Massey による $\mathbf{R}^3$ 内の完備平坦曲面の決定を直接的に証明する．従来は多様体の普遍被覆空間を用いる Massey 自身の証明のみで，学部学生にとって証明は難しすぎたようだ．多様体上の 1 の分解や Morse exhaustion 関数の存在など，大域的考察に必要な概念は Appendix II で述べることとして，当面必要な事実のみを準備する．以下，多様体は n 次元で境界を持たず，連結と約束する．

9.1 多様体

定義3.5で与えた $\mathbf{R}^3$ 内の曲面は滑らかな2次元多様体の一例である．座標関数が2個から n 個に変わったと考えれば，n 次元の滑らかな多様体 M^n は曲面の定義から自然に想像できるだろう．実際に十分大きい N をとれば，Whitney の定理により n 次元多様体 M^n は $\mathbf{R}^N$ の n 次元曲面と考えられる．M^n は $\mathbf{R}^N$ の図形を介在せずに座標変換の法則のみを満たすと考えればよい．多様体 M^n は**座標近傍によって覆われた抽象的な位相空間**として定義される．ここに，座標近傍によって覆われた M の部分集合は $\mathbf{R}^n$ の開集合と同相だから，M は第3章の始めに述べた $\mathbf{R}^n$ の位相的性質を備えている．

定義 9.1 M は第2可算公理を満たす Hausdorff 空間で，各点 $p \in M$ に対し p を含む開近傍で $\mathbf{R}^n$ の開集合と同相になるものが存在するとき，M を **n 次元位相多様体**という．

例 9.2 $\mathbf{R}^3$ の曲面は2次元位相多様体である．

n 次元位相多様体 M の開集合 $U \subset M$ が $\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω と同相で，$\varphi : U \to \Omega$ を同相写像とする．(U, φ) を**座標近傍**という．各点 $p \in U$ に対して $\varphi(p) := (x^1(p), \cdots, x^n(p))$ と表すとき，座標関数 $x^i : U \to \mathbf{R}$ は連続で，これら n 個の組 $(x^1(p), \cdots, x^n(p))$ を p の**局所座標系**という．M の2つの座標近傍 $(U, \varphi), (V, \psi)$ が $U \cap V \neq \emptyset$ のとき，2つの開集合 $\varphi(U \cap V), \psi(U \cap V) \subset \mathbf{R}^n$ の間の対応

$$\psi \circ (\varphi|_{U \cap V})^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V),$$
$$\varphi \circ (\psi|_{U \cap V})^{-1} : \psi(U \cap V) \longrightarrow \varphi(U \cap V)$$

はそれぞれ同相写像で，一方は他方の逆写像である．これらを**座標変換**という．

定義 9.3 n 次元位相多様体 M は，以下の条件を満たすとき **C^∞-多様体** (**滑らかな多様体**) という．M の座標近傍族 $\{(U_i, \varphi_i\}_{i=1,2,\cdots}$ が存在して，

(i) $\bigcup U_i = M$ を満たす．

(ii) $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ のとき，座標変換

$$\varphi_i \circ (\varphi_j|_{U_i \cap U_j})^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

および

$$\varphi_j \circ (\varphi_i|_{U_i \cap U_j})^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

がともに滑らかな写像である.

例 9.4　開区間は滑らかな 1 次元多様体である. $\mathbf{R}^3$ の滑らかな曲面は 2 次元の滑らかな多様体である.

9.1.1　写像の微分

以後, 特に断らないかぎり滑らかな多様体のみを議論する. 曲面上の曲線と同じように, 多様体 M 上の曲線を定義する. $\mathbf{R}^n$ 内の曲線はすでに学んだ. M の点 p のまわりの座標近傍を (U, φ) とし, $\varphi(p) \in \Omega \subset \mathbf{R}^n$ を通る Ω 内の曲線の φ^{-1} による像を用いて $p \in M$ を通る曲線を定義する. 0 を含む区間を $\mathbf{I}$ とし, 写像 $c : \mathbf{I} \to U \subset M$ が $c(0) = p$ かつ $\varphi \circ c : \mathbf{I} \to \Omega$ が $\mathbf{R}^n$ の曲線のとき, c を M の**曲線**という. $p \in U$ の近傍で定義された関数 f に対し, c に沿う f の方向微分を関数 $f \circ c : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ の $t = 0$ における微分として

$$v(f) := \frac{d}{dt} f \circ c(t)\Big|_{t=0}$$

と定める. v は以下の性質を満たす.

(i)　p のある近傍で関数 f, g が一致すれば $v(f) = v(g)$.

(ii)　$\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ と関数 f, g に対し $v(\alpha f + \beta g) = \alpha v(f) + \beta v(g)$.

(iii)　$v(fg) = v(f)g + fv(g)$.

こうして p のまわりで定義された任意の関数 f に対し $v(f)$ を対応させる作用 v を p における M の**接ベクトル**という. p における M の接ベクトル全体の集合は実ベクトル空間という. これを T_pM と書く. p のまわりの局所座標を $\varphi = (u^1, \cdots, u^n)$ とする. $\xi \in T_pM$ に対して $f \circ c(t) = (f \circ \varphi^{-1})(\varphi \circ c)(t)$ だから

$$\varphi \circ c(t) = (u^1(t), \cdots, u^n(t)), \qquad f \circ \varphi^{-1} = F(u^1, \cdots, u^n)$$

とおくと

$$\xi(f) = \frac{d}{dt} F(u^1(t), \cdots, u^n(t))\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{du^i(t)}{dt}\Big|_{t=0} \frac{\partial F}{\partial u^i}(\varphi(p))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{du^i(t)}{dt}\Big|_{t=0} \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial u^i}(\varphi(p))$$

と表示される．ここで，

$$\frac{\partial}{\partial u^i}(p)(f) := \frac{\partial F}{\partial u^i}(\varphi(p)) \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

とおくと，$\dfrac{\partial}{\partial u^i}(p)$ は p における M の接ベクトルで，

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial u^1}(p), \frac{\partial}{\partial u^2}(p), \cdots, \frac{\partial}{\partial u^n}(p) \right\}$$

は T_pM の基底となることが解る．実際，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha^i \frac{\partial}{\partial u^i}(p) = 0$ を満たす実数 $\alpha^1, \cdots, \alpha^n$ をとれば，

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha^i \frac{\partial}{\partial u^i}(p) \right)(u^k) = \alpha^k \qquad (k = 1, \cdots, n)$$

を得る．従ってこれらは 1 次独立である．任意の接ベクトル $\xi \in T_pM$ に対して，$\xi = \dot{c}(0)$ となる曲線 $c : \mathbf{I} \to U$ をとると

$$\dot{c}(0) = \frac{d}{dt} \varphi^{-1} \circ \varphi \circ c(t) \Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial u^i}(p) \frac{du^i(t)}{dt} \Big|_{t=0}$$

だから，$\left\{ \dfrac{\partial}{\partial u^1}(p), \dfrac{\partial}{\partial u^2}(p), \cdots, \dfrac{\partial}{\partial u^n}(p) \right\}$ は T_pM の基底である．こうして局所座標 $\varphi = (u^1, \cdots, u^n)$ を介して $\dot{c}(0) = \xi$ を使えば $\left(\dfrac{du^1}{dt}, \cdots, \dfrac{du^n}{dt} \right)$ により T_pM は $\mathbf{R}^n$ と同一視できる．

次に 2 つの多様体 M, N の間の滑らかな写像を $f : M \to N$ とする．$p \in M$ における f の微分写像 $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ を定義しよう．座標近傍 (U, φ), (V, ψ) は $p \in U$, $f(p) \in V$ かつ $\varphi = (u^1, \cdots, u^n)$, $\psi = (v^1, \cdots, v^k)$ とし，任意の接ベクトル $\xi \in T_pM$ を速度ベクトルとする曲線を $c : \mathbf{I} \to U$, $c(0) = p$ とする．$0 \in \mathbf{I}$ の近傍 $\mathbf{J} \subset \mathbf{I}$ で $f \circ c : \mathbf{J} \to V$ が $f(p)$ を通る N の曲線として定義される．

$$\varphi \circ c(t) = (u^1(t), \cdots, u^n(t)), \qquad \psi \circ f \circ c(t) = (v^1(t), \cdots, v^k(t))$$

と表したとき，$f(p) = f \circ c(0)$ におけるこの曲線の速度ベクトル $df_p(\xi)$ は

$$df_p(\xi) = \sum_{j=1}^{k} \beta^j \frac{\partial}{\partial v^j}(f(p)) = \sum_{j=1}^{k} \frac{dv^j(t)}{dt} \Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial v^j}(f(p))$$

と表せる．接ベクトルの定義から

$$df_p\Big(\frac{\partial}{\partial u^i}(p)\Big) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial v^j}{\partial u^i}(\varphi(p))\frac{\partial}{\partial v^j}(f(p))$$

である．従って

$$df_p(\xi) := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial v^j}{\partial u^i}(\varphi(p))\frac{du^i(t)}{dt}\Big|_{t=0}\frac{\partial}{\partial v^j}(f(p))$$

を得る．すなわち，

$$\beta^j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v^j}{\partial u^i}(\varphi(p))\frac{du^i(t)}{dt}\Big|_{t=0}.$$

問 9.5　上の式はベクトル $df_p(\xi)$ が座標近傍のとり方に無関係に決まることを示せ．

定義 9.6　M, N を n 次元，k 次元 $(n \le k)$ 多様体とする．滑らかな写像 $f : M \to N$ が M の点 $p \in M$ で

$$df_p = 0$$

を満たすとき，p を f の**臨界点**といい，f の臨界点全体の集合を $\mathrm{Crit}(f)$ と書く．M の点 p で

$$\mathrm{rank}(df_p) = n$$

を満たすとき，f は p で**正則**という．f が M の各点で正則のとき，f を**はめ込み** (immersion) という．はめ込みが単射のとき**埋め込み** (embedding) という．

多様体 M の接空間全体の集合 $TM := \bigcup_{p\in M} M_p$ を**接束** (tangent bundle) という．TM は $2n$ 次元の滑らかな多様体である．自然な射影 $\Pi : TM \to M$ を $\Pi(v) := p\,(\forall v \in M_p)$ と書く．写像 $Z : M \to TM$ が

$$\Pi \circ Z = \mathrm{id}|_M$$

を満たすとき，写像 Z を**ベクトル場** (vector field) という．M 上のベクトル場全体の集合を $\mathcal{X}(M)$，滑らかな関数全体の集合を $C^\infty(M)$ と表す．$f : M \to N$ を 2 つの多様体の間の写像とする．$X : M \to TN$ が

$$\Pi \circ X = f$$

を満たすとき，X を **f に沿うベクトル場**という．$\mathcal{X}_f$ を f に沿うベクトル場全

体の集合とする.

9.2 Riemann 計量

M 上の滑らかなベクトル場 $V,\, W \in \mathcal{X}(M)$ に対して，正定値対称 2 次形式 g は $g(V,\, W): M \to \mathbf{R}$ が滑らかな関数であるとき，M 上の **Riemann 計量** (Riemannian metric) という．座標近傍 $(U,\, \mathbf{x})$ を使って V, W を基底に関して局所的に

$$V|_U = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad W|_U = \sum_{i=1}^{n} w^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad g_{ij} := g\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big)$$

と表したとき，v^i, w^j, g_{ij} は全て U 上の滑らかな関数である．2 次元多様体上の Riemann 計量の 1 つの例は曲面上の第 1 基本形式である．滑らかな多様体上に Riemann 計量を導入することで多様体に特別な条件を設定したことにはならない．すなわち，**滑らかな多様体は Riemann 計量を許容する**．実際，Whitney のはめ込み定理を用いて M を $\mathbf{R}^N$ にはめ込み，$\mathbf{R}^N$ から完備な Riemann 計量を導入することができる．M は第 2 可算公理を満たすので，局所有限性を持つ座標近傍族 $\{(U_i,\, \varphi_i)\}_{i=1,2,\cdots}$ で M の開被覆となるものが存在する．これに附随する 1 の分解を用いて M に完備な Riemann 計量を導入することができる．この議論は Appendix II に譲る．ともかく，多様体の研究にさいして，多様体を $\mathbf{R}^N$ の部分多様体と考えることや，完備な Riemann 計量を導入することが特別な条件を設定することにはならない点を注意したい．

定義 9.7　多様体 M とその上の Riemann 計量 g の組 $(M,\, g)$ を **Riemann 多様体**という．

Riemann 計量によって接空間上にベクトル内積を導入することができる．$\xi \in T_pM$ の長さ $\|\xi\|$ がベクトル場 V の点 p における値によって

$$\|\xi\| := g(V, V)^{\frac{1}{2}}(p), \qquad V(p) = \xi$$

で与えられ，M 上の曲線の長さを測ることができる．すなわち，$c: \mathbf{I} \to M$ を曲線とするとき，c の長さ $L(c)$ は以下で与えられる．

$$L(c) = \int_{\mathbf{I}} \|\dot{c}(t)\| dt.$$

以後，曲面の場合と同様にして **Einstein** の規約を用いる．

定義 9.8 第 1 種および第 2 種 Christoffel 記号を以下で定義する．

$$\Gamma^j_{km} := \frac{1}{2} g^{jh} (\partial_k g_{hm} + \partial_m g_{kh} - \partial_h g_{km}),$$

$$[ij\,;\,k] := \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}), \qquad \partial_k := \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

9.2.1 測地線

連続写像 $c : [\alpha, \beta] \to M$ は，有限固の分点 $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = \beta$ が存在し，各々の $i = 1, \cdots, k$ に対して $c|[t_{i-1}, t_i]$ が滑らかな曲線のとき，**区分的に滑らかな曲線** (piecewise smooth curve) という．区分的に滑らかな曲線 $c : [\alpha, \beta] \to M$ に対して連続写像

$$V : [\alpha, \beta] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \tag{9.2.1}$$

が以下の性質を持つとき，V を c **の変分** (variation along c) という．

(i) $V|[t_i, t_{i+1}] \times (-\varepsilon, \varepsilon)\,(i = 1, \cdots, k-1)$ は滑らかな写像である．

(ii) 任意の $t \in [\alpha, \beta]$ に対して $V(t, 0) = c(t)$.

十分小さい $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ に対して，$t \mapsto V(t, s)$ を**変分曲線**という．

特に，

$$V(\alpha, s) = c(\alpha), \qquad V(\beta, s) = c(\beta) \qquad (s \in (-\varepsilon, \varepsilon)) \tag{9.2.2}$$

を満たす V を**固有変分** (proper variation) という．

定義 9.9 弧長をパラメータとする曲線 $\gamma : [0, \ell] \to M$ がその全ての固有変分に対する変分曲線の長さに関して極値をとるとき，γ は**局所最短性を持つ** (locally minimizing property) という．局所最短性を持つ曲線 γ を**測地線** (geodesic) という．

簡単のため $(U, \mathbf{x})$ を M の座標近傍とし，曲線 $c : [\alpha, \beta] \to U$ を局所座標系で $\mathbf{x} \circ c(t) = (x^1(t), \cdots, x^n(t))$ とする．一般の曲線 $c : \mathbf{I} \to M$ に対しては有限個の座標近傍で $c(\mathbf{I})$ を覆って考える．

定理 9.10 弧長をパラメータとする曲線 $c : [\alpha, \beta] \to M$ に沿う任意の固有変分 $V : [\alpha, \beta] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ に対して $L(0) \leq L(s)$ が全ての $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ で成り立てば，c は測地線である．測地線 $\mathbf{x} \circ c(t) = (x^1(t), \cdots, x^n(t))$ は以下の

方程式を満たす：

$$\frac{d^2x^j(t)}{dt^2}+\Gamma^j_{\ell m}\frac{dx^\ell(t)}{dt}\frac{dx^m(t)}{dt}=0 \qquad (j=1,\cdots,n). \tag{9.2.3}$$

証明 c に沿う滑らかな固有変分 $V:[\alpha,\beta]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ は $V([\alpha,\beta]\times(-\varepsilon,\varepsilon))\subset U$ を満たすと仮定する．以下

$$D_1:=\frac{\partial}{\partial t},\qquad D_2:=\frac{\partial}{\partial s},\qquad X_i:=\frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$x^i(t,s):=x^i\circ V(t,s)\qquad ((t,s)\in[\alpha,\beta]\times(-\varepsilon,\varepsilon)),$$

$$\frac{\partial x^i(t,s)}{\partial t}X_i\circ V(t,s)=dV(D_1)\Big|_{(t,s)},$$

$$\frac{\partial x^i(t,s)}{\partial s}X_i\circ V(t,s)=dV(D_2)\Big|_{(t,s)}$$

と書く．このとき $\dot{x}^i:=\dfrac{\partial x^i}{\partial t}$ とおいて，

$$\begin{aligned}\frac{dL(s)}{ds}\Big|_{s=0}&=\int_\alpha^\beta\frac{\partial}{\partial s}\|dV(D_1)(t,0)\|dt\\&=\int_\alpha^\beta\frac{\partial}{\partial s}\Big(g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial t}\frac{\partial x^j}{\partial t}\Big)^{\frac{1}{2}}(t,0)\,dt\\&=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}}\Big(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial s}\dot{x}^i\dot{x}^j+2g_{ij}\frac{\partial^2x^i}{\partial t\partial s}\frac{\partial x^j}{\partial t}\Big)(t,0)dt\end{aligned}$$

を得る．パラメータ $t\in[\alpha,\beta]$ は c の弧長だから

$$\frac{\partial^2x^i}{\partial t\partial s}=\frac{\partial^2x^i}{\partial s\partial t},\qquad g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j|_{(t,0)}=1$$

を用いて上式右辺の第二項を部分積分すると，上式は

$$\int_\alpha^\beta\Big\{\frac{(\partial_kg_{ij})\dfrac{\partial x^k}{\partial s}\dot{x}^i\dot{x}^j}{2\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}}+\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{g_{ij}\dot{x}^j\dfrac{\partial x^i}{\partial s}}{\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}}\Big)-\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{g_{ij}\dot{x}^j}{\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}}\Big)\frac{\partial x^i}{\partial s}\Big\}(t,0)dt$$

$$\begin{aligned}&=g_{ij}\dot{x}^j\frac{\partial x^i}{\partial s}(t,0)\Big|_\alpha^\beta\\&\quad+\int_\alpha^\beta\Big(\frac{1}{2}(\partial_kg_{ij})\dot{x}^i\dot{x}^j-(\partial_\ell g_{kj})\dot{x}^j\dot{x}^\ell-g_{kj}\frac{\partial^2x^j}{\partial t^2}\Big)\frac{\partial x^k}{\partial s}(t,0)dt\\&=g_{ij}\dot{x}^j\frac{\partial x^i}{\partial s}(t,0)\Big|_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta g_{kj}\Big(\frac{\partial^2x^j}{\partial t^2}+\Gamma^j_{\ell m}\dot{x}^\ell\dot{x}^m\Big)\frac{\partial x^k}{\partial s}(t,0)dt\end{aligned}$$

となる．V は任意の固有変分だから $g_{ij}\dot{x}^j \dfrac{\partial x^i}{\partial s}(t,\,0)\Big|_\alpha^\beta = 0$ で，変分ベクトル場

$$\frac{\partial x^k}{\partial s}(t,\,0)\frac{\partial}{\partial x^k} = dV(D_2)\Big|_{(t,\,0)}$$

は任意にとれる．c の長さの極値条件 $\dfrac{dL(s)}{ds}\Big|_{s=0} = 0$ より測地線 $\mathbf{x}\circ c(t) = (x^1(t),\,\cdots,\,x^n(t))$ が満たすべき式は (9.2.3) である． ■

9. 2. 2　Riemann 接続

測地線の方程式は測地線の速度ベクトルが自分自身に沿って平行であると考えるとき，平行性の定義を導く．$c : [\alpha,\,\beta] \to M$ は滑らかな曲線，$X : [\alpha,\,\beta] \to TM$ を曲線 c に沿うベクトル場とする．平行性の定義は測地線の方程式を用いて得られる．すなわち，測地線は自身に平行と考えると以下の定義は自然である．

定義 9. 11　曲線 $c : [\alpha,\,\beta] \to M$ に沿うベクトル場 $X : [\alpha,\,\beta] \to TM$ は

$$\frac{d\phi^i(t)}{dt} + \Gamma^i_{jk}\phi^j(t)\frac{dx^k(t)}{dt} = 0 \qquad (i = 1,\,\cdots,\,n)$$

を満たすとき c **に沿って平行**であるという．ただし，

$$X(t) = \phi^j(t)X_j \circ c(t), \qquad x^i(t) = x^i \circ c(t) \qquad (i = 1,\,\cdots,\,n)$$

である．

実際，定義 9.11 は曲線に沿うベクトル場の微分を定義すると考えられる．これを共変微分という．共変微分は局所座標系のとり方に無関係に決まることを以下の補題で示す．

補題 9. 12　$Z(t) = \xi^i(t)X_i \circ c(t)$ は $c : [\alpha,\,\beta] \to M$ に沿うベクトル場とする．ここに $\mathbf{x}\circ c(t) = (x^1(t),\,\cdots,\,x^n(t))$ は座標近傍 U 内に含まれるとする．このとき，

$$t \longmapsto \left(\frac{d\xi^i}{dt} + \Gamma^i_{kj}\xi^k\frac{dx^j}{dt}\right)X_i \circ c(t)$$

は座標系のとり方に無関係に決まる．従ってこれは $c : [\alpha,\,\beta] \to M$ に沿うベクトル場である．

証明　$(V,\,y)$ は異なる座標系で $U \cap V$ が c の部分弧を含むとせよ．この部分弧は $\mathbf{x}\circ c(t) = (x^1(t),\,\cdots,\,x^n(t))$ で与えられ，$\mathbf{y}\circ c(t) = (y^1(t),\,\cdots,\,y^n(t))$

とする．Riemann 計量 ds^2 は $U \cap V$ では $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j = \widetilde{g}_{ab}dy^a dy^b$ と書ける．座標変換の Jacobi 行列を $(A_i^a) = \left(\dfrac{\partial y^a}{\partial x^i}\right)$ および $(B_a^i) = \left(\dfrac{\partial x^i}{\partial y^a}\right)$ とする．このとき，$A_i^a B_a^j = \delta_i^j$, $A_i^a B_b^i = \delta_b^a$ が成り立つ．Z を 2 つの局所座標系で書けば

$$Z(t) = \xi^i X_i \circ c(t) = \eta^a Y_a \circ c(t)$$

となる．ただし，$\xi^i = B_a^i \eta^a$ である．$g_{ij} = A_i^a A_j^b \widetilde{g}_{ab}$ を x^k に関して微分すると

$$\partial_k g_{ij} = A_i^a A_j^b A_k^c \frac{\partial \widetilde{g}_{ab}}{\partial y^c} + \left(\frac{\partial^2 y^a}{\partial x^k \partial x^i} A_j^b + \frac{\partial^2 y^b}{\partial x^k \partial x^j} A_i^a\right)\widetilde{g}_{ab}$$

を得る．更に，Christoffel 記号の変換式を求めるために

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma}_{bc}^a &:= \frac{1}{2}\widetilde{g}^{ad}(\partial_b \widetilde{g}_{dc} + \partial_c \widetilde{g}_{bd} - \partial_d \widetilde{g}_{bc}), \\ \overline{[bc\,;\,a]} &:= \widetilde{g}_{da}\overline{\Gamma}_{bc}^d\end{aligned}$$

とおけば，

$$[ij\,;\,k] = g_{k\ell}\Gamma_{ij}^\ell = A_i^b A_j^c A_k^a \overline{[bc,\,a]} + \frac{\partial^2 y^d}{\partial x^i \partial x^j} A_k^e \widetilde{g}_{ed}$$

を得る．従って Christoffel 記号の変換公式は

$$\Gamma_{jk}^i = A_j^b A_k^c B_a^i \overline{\Gamma}_{bc}^a + \frac{\partial^2 y^d}{\partial x^j \partial x^k} B_d^i \tag{9.2.4}$$

である．こうして

$$\begin{aligned}&\left(\frac{d\xi^i}{dt} + \Gamma_{jk}^i \xi^j \frac{dx^k}{dt}\right) X_i \\ &= \left(\frac{d}{dt}(B_a^i \eta^a) + (A_j^b A_k^c B_a^i \overline{\Gamma}_{bc}^a + \frac{\partial^2 y^d}{\partial x^j \partial x^k} B_d^i)\xi^j \frac{dx^k}{dt}\right) A_i^e Y_e \\ &= \left\{\left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial y^a \partial y^c}\frac{dy^c}{dt}\eta^a A_i^e + B_a^i \frac{d\eta^a}{dt} A_i^e\right)\right. \\ &\qquad \left. + \eta^b \frac{dy^c}{dt}\delta_a^e \overline{\Gamma}_{bc}^a + \frac{\partial^2 y^d}{\partial x^j \partial x^k}\delta_d^e B_a^j B_c^k \eta^a \frac{dy^c}{dt}\right\} Y_e \\ &= \left\{\frac{d\eta^e}{dt} + \eta^a \frac{dy^c}{dt}\left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial y^a \partial y^c} A_i^e + \frac{\partial^2 y^e}{\partial x^j \partial x^k} B_a^j B_c^k + \overline{\Gamma}_{ac}^e\right)\right\} Y_e\end{aligned}$$

が成り立つ．

$$0 = \frac{\partial}{\partial y^a}\left(\frac{\partial y^e}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial y^c}\right) = \frac{\partial^2 y^e}{\partial x^k \partial x^j} B_a^j B_c^k + A_k^e \frac{\partial^2 x^k}{\partial y^c \partial y^a}$$

を用いて

$$\left(\frac{d\xi^i}{dt}+\Gamma^i_{jk}\xi^j\frac{dx^k}{dt}\right)X_i\circ c(t)=\left(\frac{d\eta^e}{dt}+\overline{\Gamma}^e_{bc}\eta^b\frac{dy^c}{dt}\right)Y_e\circ c(t) \tag{9.2.5}$$

が得られる．つまり補題が証明された．∎

定義 9.13　$p\in M$, $v\in T_pM$ および $X\in\mathcal{X}(M)$ に対して，X の v 方向への共変微分 $\nabla_v X$ を $v=\dot{c}(0)$ として，以下のように定義する．

$$\nabla_v X:=\left(\frac{d\phi^i(t)}{dt}+\Gamma^i_{jk}\phi^j\frac{dx^k(t)}{dt}\right)X_i\circ c(t)\Big|_{t=0}. \tag{9.2.6}$$

ここに $X\circ c(t)=\phi^i(t)X_i\circ c(t), c(t)=(x^1(t),\cdots,x^n(t))$ である．c に沿うベクトル場 X が以下の方程式を満たすとき**平行**である．

$$\nabla_{\dot{c}}X=0. \tag{9.2.7}$$

問 9.14　(i)　cに沿う平行ベクトル場を X, Y とすると，内積 $g(X(t), Y(t))=\langle X(t), Y(t)\rangle$ は一定であることを証明せよ．

(ii)　測地線 $c(t)$ は自分自身に平行な曲線であること，つまり $\nabla_{\dot{c}}\dot{c}=0$ を示せ．

(iii)　測地線のパラメータ t は常に弧長 s に比例していることを示せ．

共変微分は以下の性質を満たす．$X,Y,Z\in\mathcal{X}(M)$, $f\in C^\infty(M)$ とすると，

$$\nabla_X(Y+Z)=\nabla_XY+\nabla_XZ, \tag{9.2.8}$$

$$\nabla_X(fY)=(Xf)Y+f\nabla_XY, \tag{9.2.9}$$

$$\nabla_{X+Y}Z=\nabla_XZ+\nabla_YZ, \tag{9.2.10}$$

$$\nabla_{fX}Y=f\nabla_XY. \tag{9.2.11}$$

問 9.15　上の関係式を証明せよ．

整数 $r\geq 1$, $s=0, 1$ に対して (r,s)-**型テンソル場** B を以下で定義する．

$$\mathcal{X}_0(M):=C^\infty(M),$$

$$\mathcal{X}_k(M):=\mathcal{X}(M)\times\cdots\times\mathcal{X}(M)\qquad(k\text{-times})$$

とおく．M 上の (r, s)-型テンソル場 $B:\mathcal{X}_r(M)\to\mathcal{X}_s(M)$ を以下の 2 つの条件を満たす r 重線形写像によって定義する：

$X_i,\ Y\in\mathcal{X}(M)\,(i=1, 2,\cdots,r)$, $f\in\mathcal{X}_0(M)$ に対し，

$$
\begin{aligned}
&B(X_1, \cdots, X_{i-1}, X_i + Y, X_{i+1}, \cdots, X_r) \\
&\quad = B(X_1, \cdots, X_{i-1}, X_i, X_{i+1}, \cdots, X_r) \\
&\qquad + B(X_1, \cdots, X_{i-1}, Y, X_{i+1}, \cdots, X_r), \\
&B(X_1, \cdots, X_{i-1}, fX_i, X_{i+1}, \cdots, X_r) \\
&\quad = fB(X_1, \cdots, X_{i-1}, X_i, X_{i+1}, \cdots, X_r).
\end{aligned}
$$

一般に，(r, s)-型テンソル $B : \mathcal{X}_r(M) \to \mathcal{X}_s(M)$ に対する共変微分は

$$
\begin{aligned}
&(\nabla_X B)(Y_1, \cdots, Y_r) \\
&\quad = \nabla_X (B(Y_1, \cdots, Y_r)) - \sum_{i=1}^{r} B(Y_1, \cdots, Y_{i-1}, \nabla_X Y_i, Y_{i+1}, \cdots, Y_r)
\end{aligned}
\tag{9.2.12}
$$

によって定義される．特に，スカラー $f \in C^\infty(M)$ の場合の共変微分は

$$
\nabla_X f = Xf
$$

である．

定義 9.16　Lie のカッコ積 $[*, *] : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ を

$$
[X, Y]f := X(Yf) - Y(Xf) \qquad (X, Y \in \mathcal{X}(M),\ f \in C^\infty(M)) \tag{9.2.13}
$$

と定義する．これは (2, 1)-型テンソルである．(2, 1)-型テンソル T を

$$
T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \tag{9.2.14}
$$

によって定義し，T を**捩れテンソル場** (torsion tensor field) という．

問 9.17　Riemann 計量 g は (2, 0)-型テンソル，(9.2.21) で与えた R は (3, 1)-型テンソル，(9.2.14) で与えた T は (2, 1)-型テンソルであることを示せ．

定理 9.18　$(U, \mathbf{x})$ を M の局所座標系とする．このとき，M の共変微分は

$$
\nabla_{X_i} X_j = \Gamma_{ij}^k X_k \qquad (\forall i, j = 1, \cdots, n) \tag{9.2.15}
$$

を満たす．特に $T(X_i, X_j) = 0$ である．

証明　任意に固定した点を $p \in U$, $\mathbf{x}(p) = (x^1(p), \cdots, x^n(p))$ とおく．座標曲線 $\mathbf{x} \circ c_i(t) := (x^1(p), \cdots, x^{i-1}(p), t, x^{i+1}(p), \cdots, x^n(p))$ に沿ってベクト

ル場 X_j を共変微分すると

$$\nabla_{\dot{c}_i(0)}X_j = [0 + \Gamma^k_{ij}]X_k(p) = \Gamma^k_{ij}X_k(p). \tag{9.2.16}$$

同様にして $\nabla_{X_j(p)}X_i = \Gamma^k_{ji}X_k(p)$ だから,

$$T(X_i,\, X_j) = \nabla_{X_i}X_j - \nabla_{X_j}X_i - [X_i, X_j] = 0$$

が従う. ∎

定理 9.19　Riemann 多様体 $(M,\, g)$ は共変微分 (covariant differential)∇ で torsion free かつ g は平行 (すなわち, $\nabla_{X_k}g_{ij} = 0, \forall i, j, k = 1, \cdots, n$) となるものを許容する. この共変微分を **Levi-Civita 接続**, または **Riemann 接続**という.

証明　(9.2.6) は共変微分が Riemann 計量とその微分で定義されることを意味するから, Levi-Civita 接続の存在は定理 9.18 で示された. 以下で Levi-Civita 接続の一意性を証明する. ∇ を $(M,\, g)$ 上の Levi-Civita 接続とする. g は ∇ に関して平行, つまり $\nabla g = 0$ だから, $\forall X,\, Y,\, Z \in \mathcal{X}(M)$ に対して

$$X\langle Y,\, Z\rangle = \langle \nabla_X Y,\, Z\rangle + \langle Y,\, \nabla_X Z\rangle, \tag{9.2.17}$$

$$Y\langle Z,\, X\rangle = \langle \nabla_Y Z,\, X\rangle + \langle Z,\, \nabla_Y X\rangle, \tag{9.2.18}$$

$$Z\langle X,\, Y\rangle = \langle \nabla_Z X,\, Y\rangle + \langle X,\, \nabla_Z Y\rangle \tag{9.2.19}$$

である. ただし $\langle Y,\, Z\rangle = g(Y,\, Z)$ などと略記する. ∇ は torsion free だから

$$\nabla_X Y = \nabla_Y X + [X,\, Y] \tag{9.2.20}$$

である. これを用いて

$$Z\langle X,\, Y\rangle = \langle \nabla_X Z,\, Y\rangle + \langle [Z,\, X], Y\rangle + \langle X,\, \nabla_Y Z\rangle - \langle X,\, [Y,\, Z]\rangle$$

が成り立つ. 同様にして

$$Y\langle Z,\, X\rangle = \langle \nabla_Y Z,\, X\rangle + \langle Z,\, \nabla_X Y\rangle - \langle Z,\, [X,\, Y]\rangle$$

を得る. 従って

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y,\, Z\rangle &= X\langle Y,\, Z\rangle + Y\langle Z,\, X\rangle - Z\langle X,\, Y\rangle \\ &\quad + \langle Z,\, [X,\, Y]\rangle + \langle Y,\, [Z,\, X]\rangle - \langle X,\, [Y,\, Z]\rangle \end{aligned}$$

を得る. この関係式は右辺が Riemann 計量と Lie のカッコ積のみに依存している事実に注目する. もしも ∇^* が $(M,\, g)$ の別の Levi-Civita 接続とすると,

∇^* に対しても上で求めた関係式が成立するので

$$\langle \nabla_X Y,\, Z\rangle = \langle \nabla^*_X Y,\, Z\rangle \qquad (\forall X,\, Y,\, Z \in \mathcal{X}(M))$$

となる．故に $\nabla = \nabla^*$ が成立する．従って一意性が証明された． ∎

9.2.3 曲率テンソル，断面曲率，Ricci 曲率

Riemann 多様体 $(M,\, g)$ の Levi-Civita 接続を ∇ と書く．Riemann 幾何学で重要な概念である曲率テンソル場および種々の曲率を定義する．

定義 9.20 (Riemann 曲率テンソル (Riemannian curvature tensor)) $R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ は以下によって定義する．これは $(3,1)$-型テンソルである．$\forall X,\, Y,\, Z \in \mathcal{X}(M)$ に対して

$$R(X,\, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z. \tag{9.2.21}$$

局所座標による曲率テンソルの係数表示 ${R_{ijk}}^{\ell}$ は

$$R(X_i,\, X_j)X_k = {R_{ijk}}^{\ell} X_\ell \tag{9.2.22}$$

で定義する．$\nabla_i := \nabla_{X_i}$, $\partial_i f := \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ とおけば

$$\begin{aligned} R(X_i, X_j)X_k &= \nabla_i \nabla_j X_k - \nabla_j \nabla_i X_k - \nabla_{[X_i, X_j]} X_k \\ &= \nabla_i \nabla_j X_k - \nabla_j \nabla_i X_k \\ &= \nabla_i (\Gamma^m_{jk} X_m) - \nabla_j (\Gamma^m_{ik} X_m) \\ &= \Big((\partial_i \Gamma^m_{jk} - \partial_j \Gamma^m_{ik}) + (\Gamma^m_{iq}\Gamma^q_{jk} - \Gamma^q_{ik}\Gamma^m_{jq}) \Big) X_m \end{aligned} \tag{9.2.23}$$

だから，局所座標系による曲率テンソルの係数を計量テンソルで書けば

$$\begin{aligned} {R_{ijk}}^{\ell} &= \partial_i \Gamma^\ell_{jk} - \partial_j \Gamma^\ell_{ik} + \Gamma^\ell_{iq}\Gamma^q_{jk} - \Gamma^\ell_{jq}\Gamma^q_{ik} \\ &\qquad\qquad (i,\, j,\, k,\, \ell = 1, \cdots, n) \end{aligned} \tag{9.2.24}$$

となる．

注意 9.21 第 5 章 (積分可能条件) で述べたように，Riemann 曲率テンソルは以下の性質を持つ．R を Riemann 多様体 $(M,\, g)$ の曲率テンソルとする．

$X,\, Y,\, Z,\, W \in \mathcal{X}(M)$ に対して以下が成り立つ：

$$R(X,\,Y)Z = -R(Y,\,X)Z, \tag{9.2.25}$$

$$R(X,\,Y)Z + R(Y,\,Z)X + R(Z,\,X)Y = 0, \tag{9.2.26}$$

$$\langle R(X,\,Y)Z,\,W\rangle = \langle R(Z,\,W)X,\,Y\rangle, \tag{9.2.27}$$

$$\langle R(X,\,Y)Z,\,W\rangle = -\langle R(X,\,Y)W,\,Z\rangle. \tag{9.2.28}$$

問 9.22　(5.2.4) で与えた ${R^\ell}_{ijk}$ は (9.2.24) で与えた ${R_{ijk}}^\ell$ と同一であることを示せ.

定義 9.23　接ベクトル $v,\,w \in T_pM$ と $v,\,w$ で張られる平面を $\sigma \subset T_pM$ とする．平面 $\sigma = \sigma(v,\,w)$ に関する**断面曲率** $K_M(\sigma)$ を

$$K_M(\sigma) := \frac{\langle R(v,\,w)w,\,v\rangle}{\|v\|^2\|w\|^2 - \langle v,\,w\rangle^2} \tag{9.2.29}$$

で定義する.

接ベクトル $v \in T_pM$ と T_pM の直交基底を $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n = \dfrac{v}{\|v\|}$ とする．このとき v に関する **Ricci 曲率** (Ricci curvature) $\mathrm{Ric}_M(v)$ を以下で定義する.

$$\mathrm{Ric}_M(v) := \sum_{i=1}^{n-1} K_M(\sigma(\mathbf{e}_i,\,\mathbf{e}_n)). \tag{9.2.30}$$

$p \in M$ における**スカラー曲率** $s(p)$ を以下によって定義する.

$$s(p) := \sum_{i \neq j} K_M(\sigma(\mathbf{e}_i,\,\mathbf{e}_j)). \tag{9.2.31}$$

特に 2 次元 Riemann 多様体のときは断面曲率はスカラーであり，Gauss 曲率という.

問 9.24　Ricci 曲率とスカラー曲率は接空間の直交基底の選び方に無関係に決まることを示せ.

9.3　指数写像

測地線の方程式 (9.2.3) を局所座標系 $(U, \mathbf{x})$ を用いて書き直すと，以下のように 1 階連立常微分方程式系となる.

$$v^i(s) = \frac{dx^i}{ds}, \qquad \frac{dv^i}{ds} + \Gamma^i_{jk}v^jv^k = 0 \qquad (i = 1, \cdots, n). \tag{9.3.1}$$

Christoffel 記号は U 内で滑らかな関数だから，上式は Lipschitz 条件を満たす．従って与えられた初期条件に対して上の微分方程式系は一意的に解が定まる．U の点と接ベクトル $p \in U, \xi \in T_pM$ を $x(p) = (p^1, \cdots, p^n), \xi = \xi^i X_i(p)$ とする．初期条件

$$x^i(0) = p^i, \qquad \frac{dx^i}{ds}(0) = \xi^i \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

に対して上の微分方程式系の極大解を $\gamma(p, \xi; s)\ (s \in [0, s_0))$ と書けば，微分方程式系の解の一意性より $\gamma(s) := \gamma(p, \xi; s), \gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = \xi$ となる．このとき

$$\gamma(p, \xi; t) = \gamma\Big(p, a\xi; \frac{t}{a}\Big) = \gamma(p, t\xi; 1)$$

が成立する．よって，

$$\widetilde{T}_pM := \{u \in T_pM \mid \gamma(p, u; 1) \text{ が意味を持つ}\}$$

とおけば，$\widetilde{T}_pM$ は T_pM の原点に関して星状領域をなす．つまり，原点に光源をおいたとき $\widetilde{T}_pM$ の全ての点に光が隈なく届く領域である．

定義 9.25 $p \in M$ における指数写像を

$$\exp_p : \widetilde{T}_pM \to M, \qquad \exp_p(u) := \gamma(p, u; 1)$$

によって定義する．

明らかに $\exp_p$ は滑らかな写像である．

定理 9.26 (測地線の局所最短性) 原点を含む最大の開集合 $U_p \subset \widetilde{T}_pM$ で $\exp_p|_{U_p} : U_p \to M$ が埋め込みとなるものが存在する．更に，開集合 $V_p \subset U_p$ が存在して，$\exp_p(V_p)$ 内の任意の 2 点が一意的に定まる最短測地線で結ばれる．

証明 $p \in M$ における指数写像の定義から $d(\exp_p)|_0 = \mathrm{id.}|_{T_pM}$ が成立する．以下に述べる補題 9.27 によって，$O \in \widetilde{T}_pM$ のまわりの開近傍 $U \subset \widetilde{T}_pM$ が存在して，$\exp_p|_U : U \to M$ は埋め込みとなる．この性質を持つ U の最大のものを U_p とおく．次に

$$\widetilde{TM} := \bigcup_{p \in M} \widetilde{T}_pM, \qquad \phi : \widetilde{TM} \longrightarrow M \times M$$

を $\phi(v) := (\Pi(v), \exp_{\Pi(v)} v)\ (v \in \widetilde{TM})$ とせよ．ϕ は $2n$ 次元多様体の間の滑らかな写像である．$p \in M$ のまわりの座標近傍 (W, ψ) をとると，$TM|_W :=$

$\bigcup_{q\in M} T_qM$ は $W\times\mathbf{R}^n$ と同一視できる．この同一視によって，ゼロベクトル $(p, 0)$ の W 全体にわたる和集合を $W\times\{0\}$ と書き，$\Delta W:=\{(p, p)\,|\,p\in W\}$ と書くと

$$\phi|_{W\times\{0\}}:W\times\{0\}\longrightarrow\Delta W$$

は全単射である．$(p, 0)$ において $d\Pi$ も $d(\exp_p)$ も恒等写像だから，$W\times\{0\}$ の $\widetilde{TM}$ における近傍 Λ と ΔW の $M\times M$ における近傍 Σ が存在して

$$\phi|_\Lambda:\Lambda\longrightarrow\Sigma$$

は微分同相となる．このとき，各点 $p\in W$ に対して $O\in\widetilde{T}_pM$ のまわりの近傍 $V_p\subset\widetilde{T}_pM$ を十分小さくとって $\exp_p(V_p)\times\exp_p(V_p)\subset\Sigma$ を満たすようにすると，$\exp_p(V_p)$ 内の任意の 2 点は一意的に決まる最短測地線で結ばれる．∎

補題 9.27　位相空間 X, Y の間の局所同相写像 $f:X\to Y$ が閉集合 $A\subset X$ 上で 1：1 であると仮定すると，A を含む開集合 $U\subset X$ が存在して，$f|_U:U\to f(U)$ は同相写像となる．特に X, Y が滑らかな多様体のとき，局所微分同相写像 $f:X\to Y$ が閉集合 $A\subset X$ の上で 1：1 ならば，A を含む開集合 $U\subset X$ が存在して，$f|_U:U\to f(U)$ は微分同相写像となる．

証明　結論を否定すると，A の点に収束する X の 2 つの点列 $\{p_k\}$ と $\{q_k\}$ で $f(p_k)=f(q_k)$, $p_k\neq q_k$ を満たすものが存在する．もしも $\lim_{k\to\infty}p_k=\lim_{k\to\infty}q_k\in A$ と仮定すれば，極限点のまわりの近傍 $V\subset Y$ と X の近傍 U で $f|_U:U\to V=f(U)$ が 1：1 を満たすものがとれる．従って十分大きな k に対して $p_k, q_k\in U$ となる．f は局所同相写像だから $f(p_k)\neq f(q_k)$，これは矛盾である．故に極限点は A の異なる 2 点で，$f|A$ が 1：1 であることに矛盾する．∎

Riemann 多様体 M の集合 A は，A の任意の 2 点が A に完全に含まれる最短測地線で結ばれるとき，**凸集合**という．凸集合 A が開集合のとき，A の任意の 2 点を結ぶ最短測地線は一意的に決まる．後述する第 2 変分公式を用いて定理 9.26 を更に詳しく調べると，M の各点 p のまわりで，p を中心とする半径 $\delta(p)$ の開球 $B(p\,,\,\delta(p))$ が凸集合となる $\delta(p)>0$ の存在が解る．これをまとめて，

定義 9.28 (Riemann 多様体の基本弧長)　Riemann 多様体 M の各点 p で $V_p\subset U_p\subset\widetilde{T}_pM$ は定理 9.26 における開集合とする．V_p, U_p のそれぞれに含まれる原点を中心とした開球の最大半径を $\delta(p), i(p)$ とする．コンパクト集合

$C \subset M$ に対して,

$$\delta(C) := \inf_{p\in C} \delta(p), \qquad i(C) := \inf_{p\in C} i(p)$$

とおくと $i(C) \geq \delta(C) > 0$ が成立する．任意の点 $p \in C$ のまわりの $i(C)$-距離球 $B(p,\, i(C))$ 内の任意の点 q と p は長さが $i(C)$ より短い最短測地線で一意的に結べる．$i(C)$ を C の**基本弧長**，$\delta(C)$ を C の**凸半径**という．

例 9.29 基本弧長と凸半径の例を簡単な曲面の上で見よう．

(i) 半径が $r > 0$ の標準的球面 $\mathbf{S}_r^n$ に対して

$$i(\mathbf{S}_r^n) = \pi r, \qquad \delta(\mathbf{S}_r^n) = \frac{\pi r}{2}.$$

(ii) $a > b > 0$ を半径とする円の積で与えられる平坦トーラスを M とするとき,

$$\delta(M) = \frac{a\pi}{2}, \qquad i(M) = a\pi.$$

問 9.30 コンパクト集合 $C \subset M$ に対して $i(C) \geq \delta(C) > 0$ が成り立つことを示せ．

例 9.31 ($\mathbf{R}^3$ 内の回転面上の測地線) $\mathbf{R}$ 上で定義された滑らかな正値関数 f を母線とする回転面 M の正則表示 $\mathbf{x}$ を

$$\mathbf{x}(u,\, v) := \begin{pmatrix} f(u)\cos v \\ f(u)\sin v \\ g(u) \end{pmatrix}$$

とする．$g(u) := u\,(u \in \mathbf{R})$ として，$u^1 := u,\, u^2 := v$ とおくと，Riemann 計量は $ds^2 = (1+(f')^2)(du^1)^2 + f^2(du^2)^2$ である．

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{11}^2 = 0,$$
$$\Gamma_{11}^1 = \frac{f'f''}{1+(f')^2}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{ff'}{1+(f')^2}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{f'}{f}.$$

曲率テンソルの係数は ${R_{212}}^1 = \dfrac{ff''}{(1+(f')^2)^2}$ だから，Gauss 曲率は

$$K = \frac{-g_{11}{R_{212}}^1}{g_{11}g_{22}} = \frac{-f''}{f(1+(f')^2)^2}$$

である．測地線 $\gamma : \mathbf{R} \to M$ は弧長をパラメータとして，正則表示で $\gamma(s) := \mathbf{x}(u(s), v(s))$ とすると，測地線の方程式は

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{ds^2} + \dfrac{f'f''}{1+(f')^2}\Big(\dfrac{du}{ds}\Big)^2 - \dfrac{ff'}{1+(f')^2}\Big(\dfrac{dv}{ds}\Big)^2 = 0, \\ \dfrac{d^2v}{ds^2} + 2\dfrac{f'}{f}\dfrac{du}{ds}\dfrac{dv}{ds} = 0 \end{cases}$$

である．各々の子午線 $v(s) = \mathrm{const.}$ は測地線である．実際，Riemann 計量から $v(s) = \mathrm{const.}$ のとき $\Big(\dfrac{du}{ds}\Big)^2(1+(f')^2) = 1$ だから，これを微分すると，$v(s) = \mathrm{const.}$ が測地線の方程式を満たすことが分かる．測地線の 2 番目の方程式から

$$\frac{d}{ds}\Big(\frac{dv}{ds}f^2\Big) = 0$$

である．ここで $\dot\gamma(s)$ と $\gamma(s)$ を通る母線のなす角度を $\theta(s)$ とおけば

$$\begin{aligned} \dot\gamma(s) &= \frac{du}{ds}\mathbf{x}_1 + \frac{dv}{ds}\mathbf{x}_2, \\ 1 = \|\dot\gamma(s)\|^2 &= \cos^2\theta(s) + \sin^2\theta(s), \\ \sin^2\theta(s) &= g_{22}\Big(\frac{dv}{ds}\Big)^2 \end{aligned}$$

だから，$-\pi < \theta < \pi$ で $f^2\dfrac{dv}{ds} = f(u(s))\sin\theta(s)$ は一定である．この議論をまとめて次の定理を得る．

定理 9.32 (Clairaut の定理)　一般の関数 $g(u)$ を用いた上述の回転面の正則表示を用いて測地線を $\gamma(s) = \mathbf{x}(u(s), v(s))$ とする．$\dot\gamma(s)$ と $\gamma(s)$ を通る母線のなす角度を $\theta(s)$ とすれば，以下を満たす定数 $C(\gamma)$ が存在する：

$$f(u(s))\sin\theta(s) = C(\gamma) \qquad (s \in \mathbf{R}). \tag{9.3.2}$$

問 9.33　定理 9.32 を証明せよ．

例 9.34 (回転放物面上の測地線の挙動)　k を正定数とし，放物線 $z = \dfrac{k}{2}x^2$ を母線とし，z 軸を回転軸とする回転放物面を正則表示 $\mathbf{x} : (0, \infty)\times(0, 2\pi) \to \mathbf{R}^3$ で表せば

$$\mathbf{x}(r, \theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ \dfrac{k}{2}r^2 \end{pmatrix} \qquad (r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi)$$

となる．パラメータを $u^1 := r$, $u^2 := \theta$ として Riemann 計量は

$$ds^2 = (1 + k^2r^2)(dr)^2 + r^2(d\theta)^2,$$

Christoffel 記号は

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = 0,$$
$$\Gamma^1_{22} = \frac{-r}{1+k^2r^2}, \qquad \Gamma^1_{11} = \frac{k^2 r}{1+k^2r^2}, \qquad \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}.$$

M の曲率テンソルの成分は

$$R_{212}{}^1 = \frac{-k^2r^2}{(1+k^2r^2)^2}$$

である．Gauss 曲率 K は

$$K = \frac{k^2}{(1+k^2r^2)^2}.$$

子午線と異なる測地線 $\gamma : \mathbf{R} \to M$ を $\gamma(s) = \mathbf{x}(r(s), \theta(s))$ と表すと，(9.2.3) は以下の式になる：

$$r''(s) + \frac{k^2 r}{1+k^2r^2}(r'(s))^2 - \frac{r}{1+k^2r^2}(\theta'(s))^2 = 0,$$
$$\theta''(s) + \frac{2}{r}\theta'(s)r'(s) = 0.$$

$r_0 > 0$ を任意に固定する．出発点 $\mathbf{x}(r_0, 0)$ において平行円に接する測地線 γ の初期条件は

$$\gamma(0) := \mathbf{x}(r_0, 0), \qquad \dot\gamma(0) := \frac{\mathbf{x}_\theta(r_0, 0)}{\sqrt{g_{22}(r_0, 0)}}$$

である．ここで $\dot\gamma(s) = r'(s)\mathbf{x}_1 + \theta'(s)\mathbf{x}_2$ だから，Clairaut の定理 9.32 によって

$$\theta'(s) \cdot r^2(s) = r_0 \cdot \cos\angle\left(\dot\gamma(0), \frac{\partial}{\partial\theta}(r_0, 0)\right) = r_0.$$

パラメータ s は弧長だから $(r')^2(1+k^2r^2) + (\theta')^2 r^2 = 1$ を用いて

$$\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2 = \frac{r_0^2(1+k^2r^2)}{r^2(r^2-r_0^2)} > 0 \qquad (r > r_0).$$

ここで $k^2 - \dfrac{1+k^2r^2}{r^2-r_0^2} < 0$ が成り立つから

$$\frac{d\theta}{dr} > k \cdot \frac{r_0}{r}$$

を得る．$r_1 > r_0$ として積分すれば

$$\theta(r_1) - \theta(r_0) > \int_{r_0}^{r_1} k \cdot \frac{r_0}{r} dr = kr_0 \log\frac{r_1}{r_0}.$$

こうして $\gamma[0, \infty)$ は回転放物面を無限回回転して頂点からは無限に遠ざかる．

例 9.35 (2 葉双曲面)　$f(x) := \sqrt{k^2x^2+1}$ を $\mathbf{R}^3$ 内で z 軸の周りに回転して得られた 2 葉双曲面の 1 葉を正則表示 $\mathbf{x} : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbf{R}^3$ で表すと

$$\mathbf{x}(r, \theta) := \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ \sqrt{k^2r^2+1} \end{pmatrix} \qquad (r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi)$$

となる．この曲面の Riemann 計量と Christoffel 記号は

$$ds^2 = \frac{k^2(k^2+1)r^2+1}{k^2r^2+1}dr^2 + r^2 d\theta^2,$$

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = 0, \qquad \Gamma^1_{22} = \frac{-r(k^2r^2+1)}{k^2(k^2r^2+1)r^2+1},$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^1_{11} = \frac{k^4r}{(k^2r^2+1)\{k^2(k^2+1)r^2+1\}}.$$

曲率テンソルと Gauss 曲率 K は

$$R_{212}{}^1 = \frac{-k^4r^2}{\{k^2(k^2+1)r^2+1\}^2}, \qquad K = \frac{k^4}{\{k^2(k^2+1)r^2+1\}^2}$$

となる．子午線と異なる測地線 $\gamma : \mathbf{R} \to M$ を $\gamma(s) = \mathbf{x}(r(s), \theta(s))$ と表すと，測地線の方程式 (9.2.3) は

$$\begin{aligned} r''(s) &+ \frac{k^4r}{(1+k^2r^2)\{k^2(k^2+1)r^2+1\}}(r'(s))^2 \\ &- \frac{r(k^2r^2+1)}{(1+k^2r^2)r^2+1}(\theta'(s))^2 = 0, \\ \theta''(s) &+ \frac{2}{r}\theta'(s)r'(s) = 0. \end{aligned}$$

$r_0 > 0$ を任意に固定する．γ は出発点 $\mathbf{x}(r_0, 0)$ において平行円に接する測地線とする．γ の初期条件は

$$\gamma(0) := \mathbf{x}(r_0, 0), \qquad \dot\gamma(0) := \frac{\mathbf{x}_\theta(r_0, 0)}{\sqrt{g_{22}(r_0, 0)}}$$

である．Clairaut の定理 9.32 と

$$\|\dot\gamma\|^2 = \frac{k^2(k^2+1)r^2+1}{k^2r^2+1}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = 1$$

を用いて，$r > r_0$ のとき

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{r_0}{r}\sqrt{\frac{k^2r^2(1+k^2)+1}{(r^2-r_0^2)(k^2r^2+1)}}$$

を得る．ここで不等式

$$k^2+1-\frac{k^2r^2(k^2+1)+1}{k^2r^2+1}>0$$

を用いて

$$\frac{d\theta}{dr}<\frac{r_0\sqrt{k^2+1}}{r\sqrt{r^2-r_0^2}}.$$

従って，$r_1>r_0$ に対して

$$\theta(r_1)-\theta(r_0)<\int_{r_0}^{r_1}\frac{r_0\sqrt{k^2+1}}{r\sqrt{r^2-r_0^2}}dr=\sqrt{k^2+1}\tan^{-1}\frac{r_1^2-r_0^2}{r_0}.$$

故に

$$\lim_{r_1\to\infty}\theta(r_1)\leq\frac{\sqrt{k^2+1}}{2}\pi.$$

すなわち，$\gamma[0,\infty)$ はたかだか有限回回転して $s\to\infty$ としたとき，ある子午線に漸近する．

例 9.36 ($\mathbf{R}^3$ 内の回転トーラス) $a>b>0$ を定数として回転トーラス $T(a,b)\subset\mathbf{R}^3$ の正則表示を (4.1.1) で与える．

曲面上の点 $\mathbf{x}(u,v)$ を通る平行円の半径は $f(u)=a+b\cos u$ で与えられ，子午線は長さ $2b\pi$ の単純閉測地線である．Riemann 計量は $u^1:=u$, $u^2:=v$ とおいて

$$g_{11}=b^2,\qquad g_{12}=0,\qquad g_{22}=(a+b\cos u)^2.$$

Christoffel 記号は

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1&=\Gamma_{12}^1=\Gamma_{22}^2=\Gamma_{11}^2=0,\\ \Gamma_{22}^1&=\frac{(a+b\cos u)\sin u}{b^2},\\ \Gamma_{12}^2&=\frac{-b\sin u}{a+b\cos u}.\end{aligned}$$

測地線 $\gamma:\mathbf{R}\to M$ を $\gamma(s):=\mathbf{x}(u(s),v(s))$ とおいて測地線の方程式 (9.2.3) を求めると，

$$\begin{aligned}u''(s)+\frac{(a+b\cos u)\sin u}{b^2}\left(\frac{dv(s)}{ds}\right)^2&=0,\\ v''(s)-\frac{2b\sin u}{a+b\cos u}\frac{du(s)}{ds}\frac{dv(s)}{ds}&=0.\end{aligned}$$

Clairaut の定理 9.32 から定数 $C(\gamma)$ が存在して

$$\langle \dot{\gamma}(s),\, \mathbf{x}_v \rangle = v'(s)(a + b\cos u)^2 = C(\gamma).$$

$T(a,\, b)$ 上の測地線 γ の挙動を調べよう．$C(\gamma)$ の取り得る値の範囲は $0 \leq C(\gamma) \leq a + b$ で，平行円の半径のとり得る値の範囲は $[a - b,\, a + b]$ である．γ の概形は Figure 9.3 に示す．

(i)　$C(\gamma) = 0$ のとき，v_0 を定数として，$\gamma(s) = \mathbf{x}(u(s),\, v_0)$ は子午線である．

(ii)　$0 < C(\gamma) < a - b$ のとき，$C(\gamma)$ は全ての平行円の半径より小さい．$\alpha(s) := \sphericalangle(\dot{\gamma}(s),\, \mathbf{x}_n(u(s),\, v(s)))$ とおくと，$0 < \sin \alpha(s) < 1,\, \forall s \in \mathbf{R}$ で $\alpha(s)$ は n を整数として，$u(s_n) = (2n-1)\pi$ を満たす s_n で最大値をとり，$u(s'_n) = 2n\pi$ を満たす s'_n で最小値をとる．従って，$\gamma(\mathbf{R})$ は $T(a,\, b)$ を子午線方向にも，平行円方向にも無限回周期的に回転する．周期は $[s_0,\, s_1]$ である．

(iii) $C(\gamma) = a - b$ のとき，γ は半径が $a - b$ より大きい平行円に接することは出来ない．γ は半径 $a - b$ の平行円に接するから，$\gamma(s) = (-\pi,\, v(s))$ は最小半径の平行円と一致する．

(iv)　$a - b < C(\gamma) < a + b$ のとき，γ は $C(\gamma)$ に等しい半径の平行円に接し，$u_0 \in (-\pi,\, 0)$ を $a + b\cos u_0 = C(\gamma)$ とおくと，$\gamma(\mathbf{R})$ は平行円 $v \mapsto \mathbf{x}(\pm u_0,\, v),\, v \in \mathbf{R}$ に無限回接しながら帯状領域 $\mathbf{x}([-u_0,\, u_0] \times \mathbf{R})$ を周期的に回転する．

(v)　$C(\gamma) = a + b$ のとき，γ は最大半径の平行円に接し，他の平行円と交わることは出来ない．従って，$\gamma(s) = \mathbf{x}(u(s),\, 0)$ は最大の平行円と一致する．

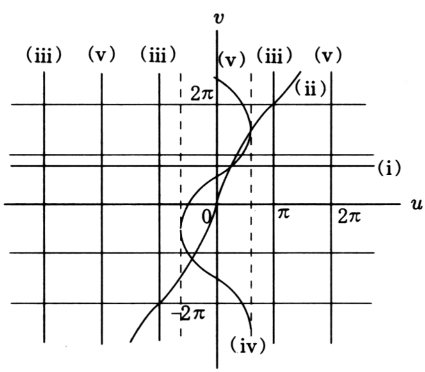


Figure 9.3

問 9.37　例 9.36 の回転トーラスについて，2 つの主曲率と Gauss 曲率，平均曲率を求めよ．

問 9.38　dM を 2 次元 Riemann 多様体の面積素とする．M の曲率積分 $c(M)$ を

$$c(M) := \int_M K dM$$

と定義し，全曲率と呼ぶ．上の例で，回転放物面および 1 葉双曲面の全曲率を求めよ．

9.4　第 1 変分公式と第 2 変分公式

局所最短性を持つ曲線が定理 9.26 によって測地線であることが示された．逆に，測地線の方程式を満たす曲線はつねに局所最短性を持つだろうか？　簡単な反例は，標準的球面の大円 (赤道) の半分より長い部分弧を考えれば十分だろう．赤道の周長はその平行円よりつねに長い．定理 9.26 によって長さが十分に短い測地線の場合には最短性が示された．このような性質が一般の測地線に対して成立するかどうかを調べ，測地線の第 1，第 2 変分公式について議論する．ここで取り扱う測地線は断らないかぎり弧長をパラメータとする．

定理 9.39　$c : [\alpha, \beta] \to M$ を測地線，$V : [\alpha, \beta] \times \mathbf{I} \to M$ を c の変分とする．$X := dV(D_1), Y := dV(D_2)$ を V に沿うベクトル場とする．ここで $D_1 := \dfrac{\partial}{\partial t}, D_2 := \dfrac{\partial}{\partial s}$ とする．変分曲線 $V_s(t) := V(t, s)$ の長さを $L(s)$ とおくと

$$\begin{aligned} L'(0) &= \langle Y, X\rangle(t,0)\big|_\alpha^\beta \qquad (\text{第 1 変分公式}), \\ L''(0) &= \int_a^\beta (\langle \nabla_{D_1} Y_\perp, \nabla_{D_1} Y_\perp\rangle - \langle R(Y_\perp, X)X, Y_\perp\rangle)(t, 0)dt \\ &\qquad + \langle \nabla_{D_2} Y, X\rangle(t, 0)\big|_\alpha^\beta \qquad (\text{第 2 変分公式}) \end{aligned}$$

が成り立つ．特に V が固有変分のとき

$$\begin{aligned} L'(0) &= 0, \\ L''(0) &= \int_a^\beta (\langle \nabla_{D_1} Y_\perp, \nabla_{D_1} Y_\perp\rangle - \langle R(Y_\perp, X)X, Y_\perp\rangle)(t, 0)dt \end{aligned}$$

である．ここで $Y_\perp$ は Y の $\dot{c}$ に関する法成分 $Y_\perp = Y - \langle Y, X\rangle X$ である．

証明　$X(t, 0) = \dot{c}(t)$ は単位ベクトルで V は滑らかだから，0 を含む開区間 $\mathbf{I}_0 \subset \mathbf{I}$ で $X(t, s) \neq 0\, (\forall(t, s) \in [\alpha, \beta] \times \mathbf{I}_0)$ を満たすものが存在する．従って $V_s(t)\, (\forall s \in \mathbf{I}_0)$ は滑らかな変分曲線となる．V は c の変分だから $\nabla_{D_1} dV(D_2) = \nabla_{D_2} dV(D_1)$ を用いて

$$L'(s) = \int_\alpha^\beta \frac{\langle \nabla_{D_2} X,\, X\rangle(t,\, s)}{\|X(t,\, s)\|}\, dt = \int_\alpha^\beta \frac{\langle \nabla_{D_1} Y,\, X\rangle(t,\, s)}{\|X(t,\, s)\|}\, dt$$

である．c は測地線だから，以下の式を使えば第 1 変分公式が成り立つ．

$$\begin{aligned}\langle \nabla_{D_1} Y,\, X\rangle(t,\, 0) &= (D_1\langle Y,\, X\rangle - \langle Y,\, \nabla_{D_1} X\rangle)(t,\, 0)\\ &= D_1\langle Y,\, X\rangle(t,\, 0).\end{aligned}$$

次に第 2 変分公式を示そう．

$$L''(s) = \int_\alpha^\beta D_2\Big(\frac{\langle \nabla_{D_1} Y,\, X\rangle}{\|X(t,\, s)\|}\Big)(t,\, s)dt$$

だから被積分関数は

$$\begin{aligned}&D_2\Big(\frac{\langle \nabla_{D_1} Y,\, X\rangle}{\|X\|}\Big)\\ &\quad = \frac{\langle \nabla_{D_2}\nabla_{D_1} Y,\, X\rangle + \langle \nabla_{D_1} Y,\, \nabla_{D_2} X\rangle}{\|X\|} - \frac{\langle \nabla_{D_1} Y,\, X\rangle^2}{\|X\|^3}\end{aligned}$$

となる．ここで $s = 0$ では $\|X(t, 0)\| = 1\, (\forall t \in [\alpha, \beta])$ だから，$(t, 0)$ において $\nabla_{D_1}(\langle Y,\, X\rangle X) = D_1\langle Y,\, X\rangle X + \langle Y,\, X\rangle \nabla_{D_1} X = D_1\langle Y,\, X\rangle X$ および $\langle \nabla_{D_1} Y_\perp,\, X\rangle = 0$ を得る．故に $Y - Y_\perp = \langle Y,\, X\rangle X$ と $\langle \nabla_{D_1} Y_\perp,\, X\rangle = 0$ を用いて

$$\begin{aligned}\langle \nabla_{D_1} Y,\, \nabla_{D_1} Y\rangle &= \langle \nabla_{D_1} Y_\perp,\, \nabla_{D_1} Y_\perp\rangle\\ &\qquad + 2\langle \nabla_{D_1} Y_\perp,\, D_1\langle Y,\, X\rangle X\rangle + \langle D_1\langle Y,\, X\rangle X,\, D_1\langle Y,\, X\rangle X\rangle\\ &= \langle \nabla_{D_1} Y_\perp,\, \nabla_{D_1} Y_\perp\rangle + (D_1\langle Y,\, X\rangle)^2\langle X,\, X\rangle\\ &= \langle \nabla_{D_1} Y_\perp,\, \nabla_{D_1} Y_\perp\rangle + \langle \nabla_{D_1} Y,\, X\rangle^2\end{aligned}$$

となる．上の計算をまとめて，$(t, 0)$ において

$$D_2\Big(\frac{\langle \nabla_{D_1} Y,\, X\rangle)}{\|X\|}\Big) = \langle \nabla_{D_2}\nabla_{D_1} Y,\, X\rangle + \langle \nabla_{D_1} Y_\perp,\, \nabla_{D_1} Y_\perp\rangle$$

が成り立つ．上式に曲率テンソルの関係式

$$-R(X,\, Y)Y = \nabla_{D_2}\nabla_{D_1} Y - \nabla_{D_1}\nabla_{D_2} Y$$

を代入して，変分の条件 $\langle \nabla_{D_1}\nabla_{D_2} Y,\, X\rangle(t,\, 0) = D_1\langle \nabla_{D_2} Y,\, X\rangle(t,\, 0)$ を用い

ると

$$L''(0) = \int_\alpha^\beta (\langle \nabla_{D_1} Y_\perp,\, \nabla_{D_1} Y_\perp \rangle \\ - \langle R(X, Y_\perp) Y_\perp,\, X \rangle)(t,\, 0) dt + \langle \nabla_{D_2} Y,\, X \rangle |_\alpha^\beta \qquad (9.4.1)$$

を得る. ∎

例 9.40 測地線 c : $[\alpha, \beta] \to M$ に沿う滑らかなベクトル場 Y を与えたとき, Y を変分ベクトル場とする変分 V : $[\alpha, \beta] \times \mathbf{I} \to M$ は以下のようにして構成できる.

$$V(t, s) := \exp_{c(t)} sY(t) \qquad ((t, s) \in [\alpha, \beta] \times \mathbf{I}). \qquad (9.4.2)$$

この Y を変分 V に附随した**変分ベクトル場**という.

問 9.41 この V が c の変分で, その変分ベクトル場が Y になることを示せ.

一般に, M 上の閉曲線 c から (十分小さい) 一定の距離にある曲線を**平行円** (parallel circle) という. 球面上の小円はある大円の平行円である.

例 9.42 測地線を c : $[\alpha, \beta] \to M$, Y は c に沿う平行ベクトル場で $\langle Y, \dot{c} \rangle = 0$ とせよ. V : $[\alpha, \beta] \times \mathbf{I} \to M$ は (9.4.2) で与えられる c の変分で, Y は V に附随する変分ベクトル場とする. 以上の記号のもとで,

(i) $M = \mathbf{S}^n(1)$ が n 次元単位球面で, c を大円とするとき ($\beta - \alpha = 2\pi$),

$$L'(0) = 0, \qquad L''(0) = \int_\alpha^\beta -\langle R(Y,\, \dot{c})\dot{c},\, Y \rangle dt < 0$$

が成り立つ. すなわち, 大円は小円よりも長さが長い.

(ii) $M = \mathbf{R}^n$ を n 次元 Euclid 空間とする. このとき

$$L'(0) = L''(0) = \cdots\cdots = 0$$

である. すなわち, 平行な線分は長さが等しい.

(iii) M^2 を $\mathbf{R}^3$ 内のカテノイド回転面とする. すなわち,

$$\mathbf{x}(t,\, \theta) := \begin{pmatrix} \cosh(\kappa t) \cos\theta \\ \cosh(\kappa t) \sin\theta \\ t \end{pmatrix} \qquad ((t,\, \theta) \in \mathbf{R} \times (0,\, 2\pi))$$

を正則表示とする. このとき, Gauss 曲率は曲面上至るところで負である.

$c(\theta) := \mathbf{x}(0, \theta)\,(\theta \in (0, 2\pi))$ は閉測地線となる．c に沿う平行ベクトル場は周期的で，これを変分ベクトル場とする c の変分 V に対して

$$L'(0) = 0, \qquad L''(0) > 0$$

が成り立つ．c の平行円は c よりも長くなる．

9.5 Jacobi 場

測地線 c に沿う 2 階線形常微分方程式の解として Jacobi 場は定義される．測地線の固有変分に関する第 2 変分の符号に Jacobi 場は関与している．Jacobi 場と変分および共役点との基本的関係を考察することによって測地線の局所最短性を調べることができる．しかしながら，曲面の大域的性質を論ずる立場上，ここではあまり深入りしない．

$D := \dfrac{d}{dt}$ とおいて，変分 V に沿う D の共変微分 ∇ を

$$Y' = \nabla_D Y = \nabla_{\dot{c}} Y$$

と書く．接ベクトル $u \in T_pM$ に対して $\mathcal{F}_u\colon T_pM \to T_u(T_pM)$ は T_pM 内の自然な同一視とする．

定義 9.43　$\gamma : [0, \ell] \to M$ を測地線とする．γ に沿うベクトル場 Y は以下の微分方程式の解となるとき，γ に沿う **Jacobi 場**という．

$$Y'' + R(Y, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0. \tag{9.5.1}$$

γ に沿う Jacobi 場の性質を調べよう．γ に沿う Jacobi 場全体の集合 $\mathcal{J}_\gamma$ は $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間である．$a, b \in \mathbf{R}$ を定数として $(a + bt)\dot{\gamma}$ も γ に沿う Jacobi 場で，更に $Y, Z \in \mathcal{J}_\gamma$ に対して $\langle Y', Z\rangle - \langle Y, Z'\rangle = \text{const.}$ が成り立つ．実際，任意の $Y, Z \in \mathcal{J}_\gamma$ に対して

$$\begin{aligned} D(\langle Y', Z\rangle - \langle Y, Z'\rangle) &= \langle Y'', Z\rangle - \langle Y, Z''\rangle \\ &= \langle -R(Y, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, Z\rangle - \langle Y, -R(Z, \dot{\gamma})\dot{\gamma}\rangle = 0 \end{aligned}$$

が成立する．特に $\langle Y', \dot{\gamma}\rangle = \text{const.}$ が任意の $Y \in \mathcal{J}_\gamma$ に対して成立する．$Y \in \mathcal{J}_\gamma$ が $t_1 \neq t_2$ に対して $\langle Y, \dot{\gamma}\rangle(t_1) = \langle Y, \dot{\gamma}\rangle(t_2) = 0\,(t_1 \neq t_2)$ または $\langle Y, \dot{\gamma}\rangle(t_1) = \langle Y', \dot{\gamma}\rangle(t_1) = 0\,(t_1 \in [0, \ell])$ を満たせば，$\langle Y, \dot{\gamma}\rangle = 0$ となる．

補題 9.44 $Y \in \mathcal{J}_\gamma$ の $\dot{\gamma}$ に関する法成分 $Y_\perp := Y - \langle Y, \dot{\gamma}\rangle\dot{\gamma}$ は γ に沿う Jacobi 場である.

証明 まず $DD\langle Y, \dot{\gamma}\rangle = \langle Y'', \dot{\gamma}\rangle = 0$ だから, 定数 a, b に対して $\langle Y, \dot{\gamma}\rangle(t) = a + bt$ が解る. 従って $Y_\perp := Y - (a+bt)\dot{\gamma}$ である. Y も $(a+bt)\dot{\gamma}$ も γ に沿う Jacobi 場となる. $\mathcal{J}_\gamma$ は $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間だから, $Y_\perp$ も $\dot{\gamma}$ に沿う Jacobi 場となる. ∎

以下の Jacobi 場の存在と一意性は線形常微分方程式の議論から明らかである. 証明は省略する.

補題 9.45 (Jacobi 場の存在と一意性) $\gamma : \mathbf{I} \to M$ を測地線とする. 各々のベクトル $v, w \in M_{\gamma(t_0)}$ に対して γ に沿う Jacobi 場 Y で

$$Y(t_0) = v, \qquad Y'(t_0) = w \tag{9.5.2}$$

を満たすものが一意的に存在する.

上の補題から $\mathcal{J}_\gamma$ の次元は $2n$ 次元であることが解る. 更に, $\gamma : [0, \ell] \to M$ に沿う Jacobi 場 Y がある $t_0 \in [0, \ell]$ に対して $Y(t_0) = 0$ を満たすならば, $Y(t) = 0$ となるパラメータの集合 $\{t \in [0, \ell] \,|\, Y(t) = 0\}$ は Y **のゼロ集合**であるという.

問 9.46 自明でない Jacobi 場 Y のゼロ集合 $\{t \in [0, \ell] \,|\, Y(t) = 0\}$ は有限集合であることを示せ.

測地線 $\gamma : [0, \ell] \to M$ に沿う変分 $V : [0, \ell] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ の全ての変分曲線が測地線であるとき, V を**測地変分**という.

定理 9.47 $\gamma : [0, \ell] \to M$ は測地線とする. $V : [0, \ell] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ を γ に沿う変分とする.

(1) V が測地変分ならば, V に附随する変分ベクトル場は Jacobi 場である.

(2) γ に沿う Jacobi 場が与えられたとき, これを変分ベクトル場とする測地変分 V が存在する.

証明 V を測地変分とする. $X := dV(D_1), Y := dV(D_2)$ とおくとき, $t \mapsto V(s, t), t \in [0, \ell]$ は各 $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ に対して測地線である. $X(t, s) = dV(D_1)$ は測地線の接ベクトルだから $\nabla_{D_1} X = 0$ である. 従って

$$\begin{aligned}&\nabla_{D_1}\nabla_{D_1}Y+R(Y,\,X)X\\&\quad=\nabla_{D_1}\nabla_{D_1}Y+(\nabla_{D_2}\nabla_{D_1}X-\nabla_{D_1}\nabla_{D_2}X-\nabla_{[D_1,D_2]}X)=0\end{aligned}$$

を満たす．故に Y は γ に沿う Jacobi 場である．

逆に Y が γ に沿う Jacobi 場であると仮定する．$t_1, t_2 \in (0, \ell)$ を $\phi := (\pi, \exp) : \widetilde{TM} \to M \times M$ が $(t_2 - t_1)\dot{\gamma}(t_1)$ の近傍 $W \subset \widetilde{TM}$ で埋め込みとなるように選べる．$\sigma_i : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to M$ を $\sigma_i(0) = \gamma(t_i)$, $\dot{\sigma}_i(0) = Y(t_i)$ を満たす測地線とすると，$\varepsilon_0 > 0$ を十分小さくとって

$$\phi(W) \supset \sigma_1(-\varepsilon_0,\,\varepsilon_0) \times \sigma_2(-\varepsilon_0,\,\varepsilon_0)$$

となる．従って任意の $s \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ に対して $\sigma_1(s)$ と $\sigma_2(s)$ を結ぶ一意的に定まる最短測地線 $\gamma_s : [0, \ell] \to M$ が存在して

$$\begin{aligned}&\gamma_s(t_i) = \sigma_i(s) \qquad (\forall s \in (-\varepsilon_0,\,\varepsilon_0)),\\&\lim_{s\to 0}\dot{\gamma}_s(t_i) = \dot{\gamma}(t_i) \qquad (i=1,2)\end{aligned}$$

とできる．こうして γ の測地変分

$$\begin{aligned}&V : [0,\,\ell] \times (-\varepsilon_0,\,\varepsilon_0) \to M,\\&V(t,\,s) := \gamma_s(t) \qquad ((t,\,s) \in [0,\,\ell] \times (-\varepsilon_0,\,\varepsilon_0))\end{aligned}$$

を得る．この V に附随した変分ベクトル場を J とおくと，前半の議論から，J は Jacobi 場で，$J(t_1) = \dot{\sigma}_1(0) = Y(t_1)$, $J(t_2) = \dot{\sigma}_2(0) = Y(t_2)$ が成立する．故に微分方程式の解の一意性によって $J = Y$ となる． ∎

命題 9.48 (Jacobi 場と測地変分の構成) $\gamma : [0, \ell] \to M$, $p = \gamma(0)$ を測地線とし，任意のベクトルを $v, w \in T_pM$, $u := \dot{\gamma}(0)$ とする．Y を変分ベクトル場とする測地変分を $V : [0, \ell] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ とする．このとき，

(i) $V(t,\,s) := \exp_p t(u + sw) \qquad ((t,\,s) \in [0,\,\ell] \times (-\varepsilon,\,\varepsilon))$
のとき，Y は $Y(0) = 0$, $Y'(0) = w$ を満たす Jacobi 場である．

(ii) $V(t,\,s) := \exp_{\sigma(s)} t\Gamma(s) \qquad ((t,\,s) \in [0,\,\ell] \times (-\varepsilon,\,\varepsilon))$
のとき，Y は $Y(0) = v$, $Y'(0) = 0$ を満たす Jacobi 場である．ここに，$\sigma(s) := \exp_p sv$ で，Γ は $\Gamma(0) = u$ が生成する σ に沿う平行ベクトル場である．

(iii) $V(t,\,s) := \exp_{\sigma(s)} t(\Gamma(s) + sW(s)) \qquad ((t,\,s) \in [0,\,\ell] \times (-\varepsilon,\,\varepsilon))$
のとき，Y は $Y(0) = v$, $Y'(0) = w$ を満たす Jacobi 場である．ここに，W, Γ は $W(0) = w$, $\Gamma(0) = u$ が生成する σ に沿う平行ベクトル場である．

証明　定理 9.47 から，V が γ に沿う測地変分だから V の変分ベクトル場は Jacobi 場である．従って (i) は

$$Y(0) = dV(D_2)(0,\, 0) = 0$$

かつ

$$Y'(0) = \nabla_{D_1} dV(D_2)(0,\, 0) = \nabla_{D_2} dV(D_1)(0,\, s)|_{s=0} = w$$

だから明らか.

(ii) を示す.

$$\begin{aligned} Y(0) &= dV(D_2)(0,\, s)|_{s=0} = \dot{\sigma}(s)|_{s=0} = v, \\ Y'(0) &= \nabla_{D_1} dV(D_2)(0,\, s)|_{s=0} \\ &= \nabla_{D_2} dV(D_1)(0,\, s)|_{s=0} = \Gamma'(0) = 0 \end{aligned}$$

だから (ii) が成り立つ.

(iii) は,

$$\begin{aligned} Y(0) &= dV(D_2)(0,\, s)|_{s=0} = \dot{\sigma}(s)|_{s=0} = v, \\ Y'(0) &= \nabla_{D_1} dV(D_2)(0,\, s)|_{s=0} = W(0) = w \end{aligned}$$

だから (iii) も成り立つ. ∎

例 9. 49 (平坦曲面上の測地変分)　M^2 は 2 次元 Riemann 多様体で，Gauss 曲率が至るところ 0 とする．M^2 の測地線を $\gamma : [0,\, \ell] \to M^2$ とし，E は $\langle \dot{\gamma},\, E \rangle = 0$ を満たす γ に沿う単位平行ベクトル場とする．γ の変分

$$V(t,\, s) := \exp_{\gamma(t)} sE(t) \qquad ((t,\, s) \in [0,\, \ell] \times [s_0,\, s_1],\ s_0 < 0 < s_1)$$

は閉集合上で定義された滑らかな写像の約束によって，長方形 $[0,\, \ell] \times [s_0,\, s_1]$ を含む開集合上の滑らかな写像に拡張される．$D_1 := \dfrac{\partial}{\partial t}$, $D_2 := \dfrac{\partial}{\partial s}$ として，V の変分曲線 $V_s : [0,\, \ell] \to M$, $s \in [s_0,\, s_1]$, $V_s(t) := V(t,\, s)$ の速度ベクトル $\dot{V}_s(t)$ は $\dot{V}_s(t) = dV(D_1)(t, s)$ で与えられる．V_s の両端は γ の両端において γ に直交する測地線上の 2 点を結んでいる．V_s の長さを求めるため $\dot{V}_s$ のノルムを調べる．各々の $t \in [0,\, \ell]$ に対し，$E(t)$ を初期ベクトルとする測地線を

$$\sigma_t(s) := \exp_{\gamma(t)} sE(t) = V(t, s) \qquad (s \in [s_0,\, s_1])$$

とする．$\dot{V}_s(t)$ の図形的意味は，$\dot{V}_s(t)$ が σ_t に沿う測地変分

$$V|_{[s_0,\, s_1]\times(t-\varepsilon,\, t+\varepsilon)} : [s_0,\, s_1] \times (t-\varepsilon,\, t+\varepsilon) \longrightarrow M$$

に附随する変分ベクトル場 J_t のパラメータ s における値である．すなわち，

$$\dot{V}_s(t) = J_t(s)$$

である．ここで γ に沿う変分 V の変分曲線 (これは必ずしも測地線ではない！) を区別するパラメータ s と変分曲線のパラメータ t との役割が σ_t に沿う測地変分では入れ替わっている事に注意する．J_t の初期条件は

$$\begin{aligned} J_t(0) &= \dot{\gamma}(t), \\ J_t'(0) &= \nabla_{D_2} dV(D_1)(t,\, 0) \\ &= \nabla_{D_1} dV(D_2)(t,\, 0) = \nabla_{D_1} E(t) = 0 \end{aligned}$$

を満たすから，J_t は $\dot{\gamma}(t)$ が生成する σ_t に沿う平行ベクトル場である．故に

$$dV(D_1)(t,\, s) = J_t(s), \qquad dV(D_2)(t,\, s) = \dot{\sigma}_t(s)$$

となって，

$$\begin{aligned} &\langle dV(D_1),\, dV(D_2)\rangle(t,\, s) = 0, \\ &\|dV(D_1)\|(t,\, s) = \|dV(D_2)\|(t,\, s) = 1 \end{aligned}$$

が成立する．これは $V : [0,\, \ell] \times [s_0,\, s_1] \to M^2$ が等長はめ込みであることを意味し，従って $\gamma[0,\, \ell]$ の近傍 $V([0,\, \ell] \times [s_0,\, s_1])$ は平面上の長方形 $[0,\, \ell] \times [s_0,\, s_1]$ と等長的である．特に変分曲線の長さは全て等しい：

$$L(V_s) = L(\gamma) \qquad (s \in [s_0,\, s_1]). \tag{9.5.3}$$

9.6　完備 Riemann 多様体

Riemann 多様体 $(M,\, g)$ 上に g を用いて (内部) 距離を導入することができる．M の任意の 2 点 $p,\, q$ を結ぶ M 上の曲線の長さの下限で $p,\, q$ 間の (内部) 距離を定義する．Riemann 多様体の距離空間としての位相は多様体自身の位相と同値であることを示す．この定理は Riemann 幾何学の基本定理と呼ばれている．完備 Riemann 多様体に関する Hopf-Rinow-de Rham の定理も解説する．

定義 9.50　M 上の 2 点 $p,\, q$ の**内部距離**を

$$d(p,\, q) := \inf\{L(c) \mid c : [0,\, 1] \to M,\, c(0) = p,\, c(1) = q\} \tag{9.6.1}$$

で定義する．ここに，$L(c)$ は曲線 c の長さである．$d : M \times M \to \mathbf{R}_+ := \{t \in \mathbf{R} \mid t \geq 0\}$ を M 上の**距離関数**という．M が距離空間として完備のとき，M を**完備 Riemann 多様体** (complete Riemannian manifold) という．

例 9.51　完備 Riemann 多様体は内部距離空間である．

内部距離と通常の距離の相違を示す例を挙げよう．標準的単位球面 $\mathbf{S}^n(1) \subset \mathbf{R}^{n+1}$ 上の 2 点の距離を 2 通りに定義する．

$$d(u, v) := \|u - v\| \in [0, 2],$$
$$\overline{d}(u, v) := \angle(u, v) \in [0, \pi] \qquad (u, v \in \mathbf{S}^n(1)).$$

このとき，d は内部距離ではないが，$\overline{d}$ は内部距離である．

Riemann 多様体 M の点 p と p での接空間 T_pM の原点のまわりの半径 $r > 0$ の距離球をそれぞれ

$$B(p, r) := \{x \in M \mid d(p, x) < r\}, \qquad B(O, r) := \{\xi \in T_pM \mid \|\xi\| < r\}$$

と表す．定義 9.28 により，$p \in M$ のまわりの $\delta(p)$ を半径とする距離球 $B(p, \delta(p))$ 内の任意の点 $q \in B(p, \delta(p))$ と p は，長さが距離 $d(p, q)$ に等しい $B(p, \delta(p))$ 内の測地線で一意的に結ばれる．$0 < \delta < \delta(p)$ を満たす任意の δ に対し指数写像

$$\exp_p|_{B(O,\delta)} : B(O, \delta) \to B(p, \delta)$$

は微分同相写像だから，$(B(p, \delta), (\exp_p|B(p, \delta))^{-1})$ は M の座標近傍となる．命題 7.20 とこの事実から以下の基本定理を得る．

定理 9.52 (Riemann 幾何学の基本定理)　Riemann 多様体の距離空間としての位相は多様体としての位相と同値である．

完備 Riemann 多様体について以下の Hopf-Rinow-de Rham による定理が基本的である．

定理 9.53 (完備性定理)　(M, g) は Riemann 多様体で，M 上の距離関数を d とする．このとき以下の (i), (ii), (iii) は同値である．

(i)　M は完備である．

(ii)　任意の点で指数写像は接空間全体で定義される．

(iii)　M の有界閉集合はコンパクトである．

特に，完備な Riemann 多様体 M の任意の 2 点はその 2 点間の距離を実現する測地線で結ばれる．

証明　(iii) から (i) は自明である．

(i) から (ii) を示すため，ある点 $p \in M$ での指数写像の定義域 $\widetilde{T}_pM$ が $\widetilde{T}_pM \subsetneq T_pM$ と仮定して矛盾を導く．

$\forall v \in T_pM \setminus \widetilde{T}_pM$ に対し，十分小なる $\varepsilon > 0$ に対して $\varepsilon v \in \widetilde{T}_pM$ である．よって

$$tv \in \widetilde{T}_pM \qquad (t \in (0,\, t_0),\ t_0 v \notin \widetilde{T}_pM)$$

を満たす $t_0\,(0 < t_0 < 1)$ がとれる．$\gamma_v(t) := \exp_p tv$ とすると，t_0 に収束する単調増大列 $\{t_j\}$ をとれば，点列 $\{\gamma_v(t_j)\}$ は Cauchy 列だから収束する．

$q := \lim_{j\to\infty} \gamma_v(t_j)$ とする．$\{\dot\gamma_v(t_j)\}$ は TM 内で収束する部分列を持つから，$\xi := \lim_{j\to\infty} \dot\gamma_v(t_j) \in M_q$ を初期ベクトルとする測地線を $\gamma_\xi(u) := \exp_q u\xi$ とおけば，測地線の解の一意性から $\gamma_\xi(u) = \gamma_v(t_0 + u)$ となって $t_0 v \in \widetilde{T}_pM$ を得る．これは矛盾である．よって (i) から (ii) が得られる．

(ii) から (iii) を導く．$\widetilde{T}_pM = T_pM$ とする．$r > 0$ に対して集合 $A(r) \subset M$ を

$$A(r) := \{q \in B^b(p,\, r)\,|\, p,\, q \text{ を結ぶ最短測地線が存在する }\}$$

と定義する．$0 < r < \delta(p)$ に対して $A(r) = B^b(p,\, r) = \exp_p B^b(O,\, r)$ だから，$A(r)$ はコンパクトである．

任意の $r > 0$ に対して $A(r) = B^b(p,\, r)$ かつ $A(r)$ はコンパクトであることを示せば，(ii) から (iii) の証明は終わる．

定義から $A(r) \subset B^b(p,\, r)$ である．$A(r)$ が閉集合であることを示そう．

任意の点列 $\{q_j\} \subset A(r)$ に対して $v_j \in T_pM$ で $\exp_p v_j = q_j,\ \|v_j\| = d(p,\, q_j) \le r$ を満たすベクトルが存在する．$\{v_j\}$ から収束する部分列 $\{v_k\}$ を選んで $v := \lim_{k\to\infty} v_k$ とおけば，指数写像の連続性から $\{q_k\}$ は点 q に収束し，$\exp_p v = q$ かつ $\gamma_v(t) := \exp_p tv\,(0 \le t \le 1)$ は p と q を結ぶ最短測地線となるので $q \in A(r)$ を得る．従って $A(r)$ は閉部分集合である．$\exp_p B^b(O,\, r)$ はコンパクトで，$A(r)$ はこれの閉部分集合だからコンパクトである．

$\mathbf{I} := \{r > 0\,|\, A(r) = B^b(p,\, r)\}$ とおく．$(0,\, \delta(p)) \subset \mathbf{I}$ より $\mathbf{I} \neq \emptyset$ が解る．$\mathbf{I}$ が閉区間であることを主張する．

もしも $r_0 \in \mathbf{I}$ ならば任意の $r \in (0, r_0)$ に対して $A(r) = B^b(p, r)$ が解る．$A(r) = B^b(p, r)$ が任意の $r \in (0, r_0)$ に対して成立すれば，$A(r_0) = B^b(p, r_0)$ となって，$\mathbf{I}$ が空でない閉区間となる．

最後に $r_0 \in \mathbf{I}$ に対して十分に小さな $\varepsilon > 0$ で $r_0 + \varepsilon \in \mathbf{I}$ を満たすものが存在することを示す．

コンパクト集合 $B^b(p, r_0)$ 上の凸半径を $\delta > 0$ とおく．任意の点 $q \in B^b\left(p, r_0 + \dfrac{\delta}{2}\right) \setminus B(p, r_0)$ をとり，p, q を結ぶ曲線族 $\{c_j \mid [0, 1] \to M\}$ で $c_j(0) := p$, $c_j(1) := q$, $\lim_{j\to\infty} L(c_j) = d(p, q)$ を満たすものをとる．各々の $j = 1, 2, \cdots$ に対して $c_j(t_j) \in B^b(p, r_0) \setminus B(p, r_0)$ を満たす点が存在し，点列 $\{c_j(t_j)\}$ はコンパクト集合 $B^b(p, r_0) \setminus B(p, r_0)$ 上に集積点 q_1 を持つ．

三角不等式から $d(p, q_1) + d(q_1, q) = d(p, q)$ が従う．$d(p, q_1) = r_0$ だから $d(q, q_1) < \dfrac{\delta}{2}$ となって $q \in B(q_1, \delta)$ が成り立つ．p, q_1 を結ぶ最短測地線は $B(q_1, \delta)$ 内で最短性を保ちつつ延長されて q に到達する．故に $\mathbf{I}$ は開区間となる．

M の任意の有界閉集合はあるコンパクト集合 $A(r) = B^b(p, r)$ に含まれるから (iii) が従う． ∎

第10章　曲面の大域的性質：定曲率曲面

曲面 $\mathcal{S} \subset \mathbf{R}^3$ の正則表示を用いて曲面の局所的な性質をいろいろと調べた．しかしこれだけでは曲面の全体像を十分に知ることができないだろう．曲面の全体像を把握するための基本的な考え方を理解するには曲面や多様体の定義に戻る必要がある．曲面 $\mathcal{S}$ が与えられたとき，曲面に対応して2次元多様体 M から $\mathbf{R}^3$ へのはめ込み $\iota : M \to \mathbf{R}^3$ で，その像が曲面と一致するものが存在する，と考えよう．すなわち，点 $p \in \mathcal{S}$ に対して多様体上の点 $p_0 \in M$ で $\iota(p_0) = p$ を満たすものが少なくとも1つ存在する．このとき，p のまわりの正則表示は M の座標近傍の1つを与える．実際，$D \subset \mathbf{R}^2$ を円板領域とする正則表示 $\mathbf{x} : D \to \mathbf{R}^3$ で $p \in \mathbf{x}(D) \subset \mathcal{S}$ とせよ．$U := \mathbf{x}(D)$ は S の開集合で，$\varphi : U \to \mathbf{R}^2$ を

$$\varphi(q) := \mathbf{x}^{-1}(q) \qquad (q \in U)$$

と定義すれば，(U, φ) は p を含む M の座標近傍である．

逆に，M の任意の座標近傍 (U, φ) を与えたとき，はめ込みと座標写像を組み合わせて，$D := \varphi(U)$ とおいて

$$\mathbf{x} : D \longrightarrow \mathbf{R}^3, \qquad \mathbf{x} := \iota \circ \varphi^{-1}$$

と定義すれば，$\mathbf{x} : D \to \mathbf{R}^3$ は曲面 $\mathcal{S}$ の正則表示である．

10.1　曲面の位相

曲面 $\mathcal{S} \subset \mathbf{R}^3$ 上には第1基本形式 (すなわち，Riemann 計量) が自然に導入され，曲面に対応する多様体は2次元 Riemann 多様体 M となった．Riemann 多様体 M は距離空間だから距離位相が導入され，M の多様体としての位相と同値であることが Riemann 幾何学の基本定理 9.52 によって解る．**2次元 Riemann**

多様体 M の Riemann 計量は曲面 $\mathcal{S}$ の第 1 基本形式と一致し，これは常に $\mathbf{R}^3$ から導入されたものと約束する． すなわち，曲面に対応する 2 次元 Riemann 多様体 M は，$\mathcal{S} = \iota(M)$ を満たし，$\iota : M \to \mathbf{R}^3$ はつねに等長はめ込みである．

他方，$\mathcal{S} \subset \mathbf{R}^3$ には $\mathbf{R}^3$ からの相対位相が導入できる．ここで，M の多様体としての位相を $\mathcal{T}_M$ として，$\mathbf{R}^3$ から $\mathcal{S}$ に導入された相対位相を $\mathcal{T}_\mathcal{S}$ としよう．これらの位相の間の強弱関係はどうなるだろうか？

例 10.1 開区間 $(-1, 1)$ で定義された平面曲線 $\mathbf{x} : (-1, 1) \to \mathbf{R}^2$ は

$$\mathbf{x}(0) := (0, 0), \qquad \lim_{t \downarrow -1} \mathbf{x}(t) = \lim_{t \uparrow 1} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0)$$

を満たすとせよ．たとえばレムニスケート (lemniscate : $\rho^2 := a^2 \cos 2\phi$, $u = \rho\cos\phi$, $v = \rho\sin\phi$) のパラメータ ϕ を t に変更して上の条件を満たすように $(-1, 1)$ にとる．このとき，曲面 $\mathcal{S}$ と $\mathcal{S}$ に対応する多様体 $M := (-1, 1) \times \mathbf{R}$ と埋め込み ι は

$$\iota(u, v) := \mathbf{x}(u) + v\mathbf{e}_3 \qquad ((u, v) \in (-1, 1) \times \mathbf{R}), \qquad \mathcal{S} := \iota(M)$$

と定義する．ここに，$\mathbf{e}_3$ は平面の単位法線ベクトル．点 $p := \iota(0, 0)$ のまわりの十分に小さい近傍 $U_\mathcal{S}$ と U_M は図 [Figure 10.1] のようになる．相対位相の定義から $U_\mathcal{S}$ は 3 個の連結成分をもつから，$\iota(0, 0) \in \mathcal{S}$ の任意の近傍 $U_\mathcal{S} \in \mathcal{T}_\mathcal{S}$ に対して，同じく $p \in M$ の近傍 $U_M \in \mathcal{T}_M$ で

$$U_M \subset U_\mathcal{S}$$

を満たすものが存在する．しかしながら $p \in M$ の任意の近傍 U_M に含まれる $\iota(0, 0)$ の近傍 $U_\mathcal{S}$ は存在しない．故に

$$\mathcal{T}_\mathcal{S} < \mathcal{T}_M$$

が成り立つ [Figure 10.1].

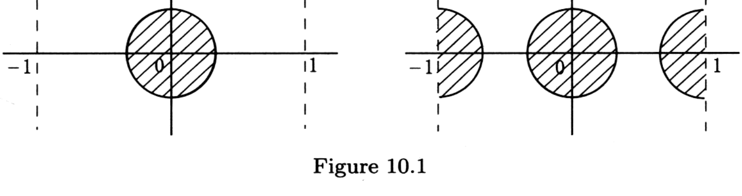


Figure 10.1

定義 10.2　$\mathcal{T}_{\mathcal{S}} = \mathcal{T}_M$ を満たす曲面を**正規曲面** (regular surface) または**単純曲面** (simple surface) と呼ぶ．

正規曲面は対応する多様体から $\mathbf{R}^3$ への埋め込みの像である．例 10.1 の曲面は $\iota : M \to \mathcal{S}$ が埋め込みであっても $\mathcal{S}$ が単純曲面とならないことを示している．

命題 10.3　$\mathcal{S} \subset \mathbf{R}^3$ が単純曲面であるための必要十分条件は：

任意の点 $p \in \mathcal{S}$ と $p_0 \in M$, $\iota(p_0) = p$ に対して，p_0 を含む座標近傍 (U, φ) と p を中心とする $\mathbf{R}^3$ の十分に小さい ε-球 $B(p, \varepsilon) = \{\mathbf{X} \in \mathbf{R}^3 \mid \|\mathbf{X} - p\| < \varepsilon\}$ で，$\mathcal{S} \cap B(p, \varepsilon)$ が連結かつ $\iota(U)$ に完全に含まれるものが存在する．

問 10.4　命題 10.3 を証明せよ．

10.1.1　閉曲面，完備曲面

曲面の定義 3.5 から，曲面の任意の点は内点である．従って我々が扱う曲面は全て開曲面である．$\iota : M \to \mathcal{S}$ によって M の Riemann 計量が導入され，M は (内部) 距離空間としての性格を持つ．d_M を M の内部距離とする．$\iota(M) = \mathcal{S}$ には $\mathbf{R}^3$ の距離 $d_{\mathcal{S}}$ を導入することができる．このとき，

$$d_M(p, q) \geq d_{\mathcal{S}}(\iota(p), \iota(q))$$

が任意の点 $p, q \in M$ に対して成り立つから，d_M は $d_{\mathcal{S}}$ よりも強い．すなわち，M の Cauchy 列の ι による像は $\mathcal{S}$ の Cauchy 列であるが，M の発散点列の ι による像は必ずしも $\mathbf{R}^3$ の発散点列ではない．M の Cauchy 列が収束するとき，M は**完備**であるという．

定義 10.5　$\iota : M \to \mathbf{R}^3$ は等長はめ込みで，$\mathcal{S} = \iota(M)$ とする．

(i)　完備非コンパクトな Riemann 多様体 M に対応する曲面 $\mathcal{S}$ を**完備開曲面**という．

(ii)　完備 Riemann 多様体 M に対応する曲面 $\mathcal{S}$ が $\mathbf{R}^3$ の閉集合のとき，$\mathcal{S}$ を**閉曲面**という．

コンパクト曲面は閉曲面である．平面 $\mathbf{R}^2 \subset \mathbf{R}^3$，回転放物面，双曲放物面，円柱面 10.9 は完備開曲面で，閉曲面でもある．

定義 10.6 $\mathbf{R}^3$ の任意のコンパクト集合 C に対して，$\iota^{-1}(\mathcal{S}\cap C)$ がコンパクト集合であるとき，ι を **proper なはめ込み**という．

M と $\mathcal{S}$ の位相に関して幾つかの例を挙げてみよう．

例 10.7 開円板の自然な埋め込みを

$$D := \{(u,\, v)\,|\, u^2+v^2<1\}, \qquad \iota\,:\, D\to\mathbf{R}^3,$$
$$\iota(u,\, v) := (u,\, v,\, 0)\,((u,\, v)\in D), \qquad \iota(D)=\mathcal{S}$$

によって定義する．このとき，曲面 (開円板) $\mathcal{S}$ はコンパクトでも完備でもない単純曲面である．

例 10.8 $M := \mathbf{R}^2$ で，$\iota\,:\, M\to\mathbf{R}^3$ および柱面 $\mathcal{S}=\iota(M)$ を

$$\iota(u,v) := \begin{pmatrix} \left(1+\dfrac{1}{\pi}\tan^{-1}u\right)\cos u \\ \left(1+\dfrac{1}{\pi}\tan^{-1}u\right)\sin u \\ v \end{pmatrix} \qquad ((u,\, v)\in\mathbf{R}^2)$$

とする．M の Riemann 計量 g を $\mathbf{R}^3$ から導入すると，$(M,\, g)$ は平坦な完備 Riemann 多様体である．$u\mapsto\iota(u,\, 0)\,(u\in\mathbf{R})$ は M の測地線の像で，この測地線は任意の部分弧が最短測地線で，M 内の直線である．単調増大発散列を $\{u_j\}$ とすると，点列 $\{(u_j,\, 0)\}$ は M の発散点列であるが，$\{\iota(u_j,\, 0)\}$ は $\mathbf{R}^3$ において収束する部分列を含む．この曲面 $\mathcal{S}$ は単純曲面である．$\mathcal{S}$ は完備開曲面であって閉曲面ではない．特に，ι は埋め込みであるが proper でない．

例 10.9 $M := \mathbf{S}^1\times\mathbf{R}$ として，$\iota\,:\, M\to\mathbf{R}^3$ および $\mathcal{S}=\iota(M)$ は直円柱とする：

$$\iota(u,v) := \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ v \end{pmatrix} \qquad ((u,\, v)\in\mathbf{S}^1\times\mathbf{R}).$$

このとき，$\mathcal{S}$ は完備開曲面で閉曲面でもある．ι は proper な埋め込みである．

10.1.2 曲面の境界点と極限点

例 10.1 における曲面 $\mathcal{S}$ は $\mathbf{R}^3$ の閉集合であるが，M 上で収束しない Cauchy 列が $\mathcal{S}$ 上では $\mathcal{S}$ のある点に収束する．これを閉曲面というのは疑問が残るか

ら，閉曲面の定義に M の完備性を条件づけた．ところが，例 10.8 の $M=\mathbf{R}^2$ は完備であるが，$\mathcal{S}=\iota(M)$ は $\mathbf{R}^3$ の閉集合ではない．具体的に示すと：

例 10.1 において，$M=(-1,\,1)\times\mathbf{R}$ 上の Cauchy 列 $\{p_n\}$, $p_n:=\left(1-\dfrac{1}{n},\,0\right)$ は発散するが，$\mathcal{S}$ 上の点列 $\{\iota(p_n)\}$ は $\mathbf{R}^3$ の点 $(0,\,0,\,0)$ に収束する．例 10.8 において $M=\mathbf{R}^2$ 上の点列 $\{p_n\}$, $p_n:=(2n\pi,\,0)$ は発散するが，$\mathcal{S}$ 上の点列 $\{\iota(p_n)\}$ は $\mathbf{R}^3$ の点 $\left(\dfrac{3}{2},\,0,\,0\right)$ に収束する．これらの相違を説明するために $\mathcal{S}$ の境界点と極限点という概念を導入しよう．

定義 10.10　(i)　M 上の Cauchy 列 $\{p_n\}$ が発散して，$\mathcal{S}$ 上の点列 $\{\iota(p_n)\}$ は $\mathbf{R}^3$ の点 $\mathbf{P}$ に収束するとき，$\mathbf{P}$ を $\mathcal{S}$ **の境界点**という．$\mathcal{S}$ の境界点全体の集合を $\partial\mathcal{S}$ と表わし，$\mathcal{S}$ **の境界**という．

(ii)　完備非コンパクトな M 上の無限発散点列 $\{p_n\}$ に対して，$\mathcal{S}$ 上の点列 $\{\iota(p_n)\}$ が $\mathbf{R}^3$ の点 $\mathbf{P}$ に収束する (部分列を含む) とき，$\mathbf{P}$ を ι **の極限点**という．ι の極限点全体の集合を ι の**極限集合**と呼んで $\mathrm{Lim}(\iota)$ と書く．

命題 10.11　完備非コンパクトな M に対応する曲面を $\mathcal{S}=\iota(M)$ とする．このとき ι の極限集合 $\mathrm{Lim}(\iota)$ が空集合であるための必要十分条件は，ι が proper なはめ込みとなることである．

問 10.12　命題 10.11 を証明せよ．

問 10.13　$\mathcal{S}=\iota(M)$ が $\mathbf{R}^3$ の閉集合となるための必要十分条件は

$$\mathrm{Lim}(\iota)\subset\mathcal{S}$$

が成り立つことであることを示せ．

例 10.7 において $\partial\mathcal{S}=\{(u,\,v)\,|\,u^2+v^2=1\}$ かつ $\mathcal{S}$ は非コンパクト，非完備である．例 10.1 において $\partial\mathcal{S}=\{\mathbf{x}(0)+t\mathbf{e}_3\,|\,t\in\mathbf{R}\}$ であるが，ι は proper でない．例 10.8 において，$\mathrm{Lim}(\iota)$ は 2 つの同心円柱面である．すなわち，

$$\mathrm{Lim}(\iota)=\left\{(x,\,y,\,z)\in\mathbf{R}^3\,\middle|\,x^2+y^2=\frac{1}{4},\,z\in\mathbf{R}\right\}\cup\left\{(x,\,y,\,z)\in\mathbf{R}^3\,\middle|\,x^2+y^2=\frac{9}{4},\,z\in\mathbf{R}\right\}.$$

このとき，ι は proper でない．

以降の議論で曲面の大域的性質を調べるとき，$\iota:M\to\mathbf{R}^3$ が proper であるとか，$\mathcal{S}$ が単純曲面であることは仮定しなくてもよい．しかし，議論を単純

化し，解り易くするために，単純曲面であると仮定してもよいだろう．

10.2 Gauss 曲率一定の完備曲面

Riemann 幾何学や積分可能条件などを用いて曲面の大域的性質を調べる．Gauss 曲率一定の曲面はおそらく単純で最も理解し易いだろう．定曲率曲面の形を局所的に決定することは不可能である．たとえば，コンタクトレンズを正定曲率曲面片とみなし，その直径を指ではさんで少し力を加えるとレンズはゆがむ．このとき，Gauss 曲率は変化しないで，主曲率が変化する．定曲率曲面の全体の形を決定しようと考えたとき，コンパクト性や完備性などの位相的な条件を考える必要が生じることはこの例から解るだろう．ところが，平坦トーラスや完備な負定曲率曲面は $\mathbf{R}^3$ 内に実現することはできない．この事実は定理 10.14 から解る．完備非コンパクト負曲率曲面が $\mathbf{R}^3$ に実現できない事実は Hilbert [9]が証明した．ここでは $\mathbf{R}^3$ 内の滑らかな完備定曲率曲面を決定する．コンパクトの場合は，Liebmann の定理 10.18『コンパクトな曲面の Gauss 曲率が一定ならば球面である』と完備平坦曲面が柱面であるという W.S.Massey の定理 10.19 を証明する．球面や平面の特徴づけを与える興味深い定理が沢山ある．これらの定理や平均曲率などいろいろな曲率が一定の曲面については第 11 章以降にゆずる．

定理 10.14 コンパクトで境界のない $\mathbf{R}^3$ 内の曲面 M 上には Gauss 曲率が正となる点が存在する．

証明 M はコンパクトだから十分大きな $R_0 > 0$ と $\mathbf{R}^3$ 内の 1 点 Q が存在して，Q を中心として半径 R_0 の距離球 $B(Q\,,R_0)$ が M を含むようにできる．Q を中心とする半径 R の球面 $\mathbf{S}^2(Q\,;R)$ が M と少なくとも 1 点 P で接触するように $0 < R \leq R_0$ を選ぶ．P を $\mathbf{R}^3$ の原点にとり，$\mathbf{R}^3$ の自然な基底を選んで $\mathbf{e}_3 := \dfrac{Q-P}{\|Q-P\|}$, $Q = R\mathbf{e}_3$ とせよ．Monge Patch(例 3.4) を用いて x^1x^2-平面内の原点の近傍 U と関数 $\varphi, \widetilde{\varphi} : U \to \mathbf{R}$ が存在して，原点のまわりの曲面 $M, \mathbf{S}^2(Q\,;R)$ の正則表示 $\mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{x}} : U \to \mathbf{R}^3$ は $(x^1, x^2) \in U$, $\widetilde{\varphi}(x^1, x^2) := R - \sqrt{R^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2}$ として

$$\mathbf{x}(x^1, x^2) = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \varphi(x^1, x^2) \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{\mathbf{x}}(x^1, x^2) = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \widetilde{\varphi}(x^1, x^2) \end{pmatrix}$$

を満たし，

$$\mathbf{x}(U) \subset M, \qquad \widetilde{\mathbf{x}}(U) \subset \mathbf{S}^2(Q\,;R)$$

かつ

$$\varphi(0,0) = \widetilde{\varphi}(0,0) = 0, \qquad \varphi(x^1, x^2) \geq \widetilde{\varphi}(x^1, x^2) \qquad (\forall (x^1, x^2) \in U)$$

が成立する．この関係式は第 2 基本形式の大小関係に移行する．M の第 1 基本形式と第 2 基本形式をそれぞれ $g_{ij}dx^i dx^j$, $h_{ij}dx^i dx^j$ とし，ティルダーをつけて $\mathbf{S}^2(Q\,;R)$ のものを表すと，$\mathbf{S}^2(Q\,;R)$ 内に M が含まれているから

$$h_{ij}dx^i dx^j - \widetilde{h}_{ij}dx^i dx^j \geq 0 \qquad (\forall (x^1, x^2) \in U)$$

が成立する．

球面の内向き単位法線ベクトル場 $\widetilde{\mathbf{e}}$ は以下で与えられる：

$$\widetilde{\mathbf{e}} := \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} -\widetilde{\varphi}_1 \\ -\widetilde{\varphi}_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \Delta := \frac{R}{\sqrt{R^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2}}.$$

更に

$$(\widetilde{g}_{ij}) = \begin{pmatrix} \dfrac{(R^2 - (x^2)^2)\Delta^2}{R^2} & \dfrac{x^1 x^2 \Delta^2}{R^2} \\ \dfrac{x^1 x^2 \Delta^2}{R^2} & \dfrac{(R^2 - (x^1)^2)\Delta^2}{R^2} \end{pmatrix},$$

$$(\widetilde{h}_{ij}) = \begin{pmatrix} \dfrac{(R^2 - (x^2)^2)\Delta^2}{R^3} & \dfrac{x^1 x^2 \Delta^2}{R^3} \\ \dfrac{x^1 x^2 \Delta^2}{R^3} & \dfrac{(R^2 - (x^1)^2)\Delta^2}{R^3} \end{pmatrix}.$$

従って構成方法から $P = \mathbf{x}(0,0) = \widetilde{\mathbf{x}}(0,0)$ で $\left(h_{ij} - \delta_{ij}\dfrac{1}{R}\right)dx^i dx^j \geq 0$ だから，M の点 P における主曲率はともに $\dfrac{1}{R}$ 以上となって

$$K(P) \geq \frac{1}{R^2}. \qquad \blacksquare$$

系 10.15 Gauss 曲率が至るところで 0 以下のコンパクト 2 次元 Riemann 多様体は $\mathbf{R}^3$ の曲面として実現できない.

定理 10.16 曲面の正則表示 $\mathbf{x} : D \to \mathbf{R}^3$ が任意の点 $(u^1, u^2) \in D$ で

(i) $$h_{ij} = 0 \qquad (i, j = 1, 2)$$

ならば, $\mathbf{x}(D)$ は平面に含まれる.

(ii) $$h_{ij} = \kappa g_{ij} \qquad (\kappa > 0, \quad i, j = 1, 2)$$

ならば, $\mathbf{x}(D)$ は球面に含まれる.

証明 Codazzi の方程式 (5.2.5) に条件式を代入すれば, Codazzi の方程式は

$$\partial_k \kappa g_{ij} + \kappa \partial_k g_{ij} - \partial_j \kappa g_{ik} - \kappa \partial_j g_{ik} + \Gamma^a_{ij} \kappa g_{ak} - \Gamma^a_{ik} \kappa g_{aj} = 0.$$

これをまとめると

$$\begin{aligned} 0 &= \{g_{ij}\partial_k \kappa - g_{ik}\partial_j \kappa\} + \kappa\{\partial_k g_{ij} - \partial_j g_{ik} + \Gamma^a_{ij} g_{ak} - \Gamma^a_{ik} g_{aj}\} \\ &= \{g_{ij}\partial_k \kappa - g_{ik}\partial_j \kappa\} + \kappa\{\partial_k g_{ij} - \partial_j g_{ik} + [ij;k] - [ik;j]\} \\ &= \{g_{ij}\partial_k \kappa - g_{ik}\partial_j \kappa\} \qquad (i, j, k = 1, 2). \end{aligned}$$

上式に g^{ij} を掛けて i, j について加算すると

$$\partial_k \kappa = g^{ij}\{g_{ij}\partial_k \kappa - g_{ik}\partial_j \kappa\} = 0 \qquad (k = 1, 2).$$

故に κ は定数となる. ここで $\mathbf{y} := \mathbf{x} + \dfrac{\mathbf{e}}{\kappa}$ とおけば

$$\partial_i \mathbf{y} = \mathbf{x}_i + \frac{1}{\kappa}\mathbf{e}_i = \mathbf{x}_i - \frac{1}{\kappa}(\kappa g_{ij} g^{jm} \mathbf{x}_m) = \mathbf{0} \qquad (i = 1, 2).$$

従って $\mathbf{y}$ は定ベクトルとなる. $\mathbf{y} := \mathbf{a}$ とおくと

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{a} \rangle = \frac{1}{\kappa^2}.$$

だから $\mathbf{x}(U)$ は $\mathbf{a}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{\kappa}$ の球面に含まれる.

次に, $h_{ij} = 0\,(\forall i, j = 1, 2)$ のとき $\mathbf{e}_i = \mathbf{0}\,(i = 1, 2)$ だから, 単位法線ベクトル場は定ベクトルである. $P = \mathbf{x}(u^1_0, u^2_0)$ を定点として, P を出発点とし曲面上の任意の点 Q を終点とする曲線を $c(t) = \mathbf{x}(u^1(t), u^2(t))\,(0 \le t \le 1)$ とする. このとき

$$\langle Q - P, \mathbf{e} \rangle = \int_0^1 \langle \dot{c}(t), \mathbf{e} \rangle dt = 0.$$

故に点 Q は P を通り, 定ベクトル $\mathbf{e}$ に垂直な平面上にある. ∎

10.3　Liebmann の定理

$\mathbf{R}^3$ 内のコンパクトな定曲率曲面を決定する．定理 10.14 の系から解るように，この定数は正である．以下の Hilbert の補題 10.17 は重要である．

補題 10.17 (Hilbert の補題)　$\mathbf{x} : D \to \mathbf{R}^3$ は滑らかな曲面の正則表示とする．もしも点 $p_0 := \mathbf{x}(u_0^1, u_0^2)$ で主曲率 κ_1, κ_2 が

(i)　κ_1 は (u_0^1, u_0^2) で極大をとる．

(ii)　κ_2 は (u_0^1, u_0^2) で極小をとる．

(iii)　$\kappa_1(u_0^1, u_0^2) > \kappa_2(u_0^1, u_0^2)$

ならば，Gauss 曲率 K について $K(u_0^1, u_0^2) \leq 0$ が成立する．

証明　仮定 (iii) より p_0 は臍点でないから，定理 4.25 によって p_0 の近傍 U 内で主曲率線が座標曲線となるように座標 (u^1, u^2) をとる．このとき

$$h_{ij} = \kappa_i g_{ij}, \qquad h_{12} = g_{12} = 0 \qquad (i, j = 1, 2).$$

Codazzi の方程式 (5.2.5) に上式を代入して

$$\partial_k(\kappa_i g_{ij}) - \partial_j(\kappa_i g_{ik}) + \kappa_k[ij\,;\,k] - \kappa_j[ik\,;\,j] = 0.$$

ここで $i = j = 1$, $k = 2$ とおけば

$$\partial_2\kappa_1 = \frac{1}{2g_{11}}(\kappa_2 - \kappa_1)\partial_2 g_{11}.$$

次に $i = j = 2$, $k = 1$ とおけば

$$\partial_1\kappa_2 = \frac{1}{2g_{22}}(\kappa_1 - \kappa_2)\partial_1 g_{22}.$$

上で求めた式を u^2, u^1 で微分すると

$$\partial_2^2\kappa_1 = \frac{1}{2g_{11}}\partial_2(\kappa_2 - \kappa_1)\partial_2 g_{11} + \frac{1}{2}(\kappa_2 - \kappa_1)\frac{g_{11}\partial_2^2 g_{11} - (\partial_2 g_{11})^2}{g_{11}^2},$$

$$\partial_1^2\kappa_2 = \frac{1}{2g_{22}}\partial_1(\kappa_1 - \kappa_2)\partial_1 g_{22} + \frac{1}{2}(\kappa_1 - \kappa_2)\frac{g_{22}\partial_1^2 g_{22} - (\partial_1 g_{22})^2}{g_{22}^2}.$$

p_0 では仮定から $\partial_i\kappa_j(u_0^1, u_0^2) = 0\,(i, j = 1, 2)$ だから，上で求めた関係式から

$$\partial_2 g_{11}(u_0^1, u_0^2) = \partial_1 g_{22}(u_0^1, u_0^2) = 0.$$

これを 2 階微分の式に代入して，主曲率に対する仮定から

$$\partial_2^2 \kappa_1(u_0^1, u_0^2) = \frac{1}{2g_{11}}(\kappa_2 - \kappa_1)\partial_2^2 g_{11}(u_0^1, u_0^2) \le 0,$$
$$\partial_1^2 \kappa_2(u_0^1, u_0^2) = \frac{1}{2g_{22}}(\kappa_1 - \kappa_2)\partial_1^2 g_{22}(u_0^1, u_0^2) \ge 0.$$

このとき，前述の例 5.7 から，Gauss 曲率 K は $\partial_1 g_{22} = \partial_2 g_{11} = 0$ となる点 p_0 では

$$K(u_0^1, u_0^2) = -\frac{1}{2g_{11}g_{22}}\left(\partial_2^2 g_{11} + \partial_1^2 g_{22}\right) \le 0. \qquad \blacksquare$$

定理 10. 18 (Liebmann の定理)　$\mathbf{R}^3$ 内の滑らかで境界のないコンパクトな曲面 $\mathcal{S}$ が Gauss 曲率一定ならば，$\mathcal{S}$ は球面と等長的である．

証明　もしも曲面上の点が全て臍点ならば，結論は定理 10.16 より従う．従って曲面上に臍点ではない点が存在したと仮定して矛盾を導く．このとき 2 つの主曲率は積が一定だから，ある点 p が存在して，その点で κ_1 が極大値をとり，κ_2 は極小値をとる．すなわち，p で Hilbert の補題 10.17 の仮定が満たされた．従って，$K(p) \le 0$ となるから，定理 10.14 によって，Gauss 曲率が正となる点が存在し，矛盾である． ∎

10. 4　完備平坦曲面に関する W.Massey の定理

Gauss 曲率が恒等的に 0 である曲面は局所的に可展面であることは古典的に知られている．我々はこの結果を詳しく証明する．すなわち，ここでは以下の事実を証明する：

必ずしも完備ではない曲面 $\mathcal{S} \subset \mathbf{R}^3$ の Gauss 曲率 $K \equiv 0$ であるとき，$p \in \mathcal{S}$ の近傍で平面に含まれるものが存在するか，さもなくば p の近傍 $U_p \subset \mathcal{S}$ で $\forall q \in U_p$ が平面に含まれる近傍を持たなければ q を通る漸近線が一意的に存在して，それは直線の一部であって，それに沿って $\mathcal{S}$ の接平面は一定である．従ってこの U_p は平面に展開可能である．これらの現象が同時におこる曲面全体は一体どのような形なのか？　上述の 2 つの性質を大域的にとらえることが自然な結果を導くだろう．この章では W.S.Massey の論文[13]を解説する．普遍被覆空間の概念が Massey 自身の証明には必要であったが，ここでは測地線の第 1 変分公式，第 2 変分公式を用いる Riemann 幾何の手法 (平坦曲面上の測地変分；例 9.49) を使った証明を与える．証明の過程で，平坦な開 Möbius 帯は $\mathbf{R}^3$

に実現できないことが解るので，完備平坦曲面に向き付け可能性を仮定する必要がない．

定理 10.19　$\mathbf{R}^3$ 内の完備，平坦な曲面 M は柱面である．

注意 10.20　xy-平面内の曲線 $\mathbf{x} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ の各点を通り z 軸に平行な直線族によって生成された曲面を**柱面**という．柱面の正則表示 $\mathbf{X} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ は

$$\mathbf{X}(s,\, t) := \mathbf{x}(s) + t\mathbf{e}_3 \qquad (s,\, t \in \mathbf{R})$$

である．

定理 10.19 で完備性の仮定をとるとどうなるだろうか？　いま $\mathcal{S} \subset \mathbf{R}^3$ を必ずしも完備ではない平坦な曲面とし，単位法線ベクトル場 $\mathbf{e}$ に関する第 2 基本形式 $h_{ij}du^i du^j$ に関して

$$A := \{p \in \mathcal{S} \,|\, \mathrm{rank}(h_{ij}(p)) = 0\}, \qquad U := \mathcal{S} \setminus A \tag{10.4.1}$$

とおくと，A は閉集合，U は開集合である．$\mathcal{S}$ の漸近線が無限に延長できるか，さもなくば $\mathcal{S}$ の境界に到達するまで延長できるとき，この漸近線を**極大漸近線**という．

定理 10.21　$\mathcal{S} \subset \mathbf{R}^3$ は必ずしも完備ではない平坦な曲面とする．このとき，$U \subset \mathcal{S}$ の各点を通る漸近線は極大である．

さて，完備平坦曲面 $M \subset \mathbf{R}^3$ に対しても $U \subset M$ は開集合だから，

$$U' := U^b \setminus U$$

とおくと以下の定理が成立する．ここに，U^b は U の閉包である．

定理 10.22　完備平坦曲面 $M \subset \mathbf{R}^3$ に対して U' の各点を通り U' に完全に含まれる直線が存在する．故に U' は直線たちの和集合である．

注意 10.23　定理 10.22 が最も重要である．U' の直線たちが全て互いに平行であることが証明されれば定理 10.19 が証明される．この定理から，開核が空でない A の各連結成分は平行な平面の帯となる．更に U の漸近線が全て互いに平行であることが証明されるだろう．Massey はこの定理の証明に M の普遍被覆空間 (すなわち $\mathbf{R}^2$) と被覆写像を用いた．

例 10.24 (接線曲面)　空間曲線 $\mathbf{x} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ の Frenet 標構を $(\mathbf{x}(s), \xi_1, \xi_2, \xi_3)$, 曲率と捩率をそれぞれ κ, τ とする．$\kappa(s) \neq 0$ が全ての $s \in \mathbf{R}$ に対して成立すると仮定する．$\mathbf{x}$ の接線全体で構成された集合のパラメータ表示を $\mathbf{X}(s, t) := \mathbf{x}(s) + t\xi_1(s)\ ((s, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R})$ とおく．

$$\mathbf{X}_1 := \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s} = \xi_1 + t\kappa\xi_2, \qquad \mathbf{X}_2 := \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \xi_1,$$
$$\mathbf{e} := \frac{\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2}{\|\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2\|} = -\xi_3.$$

故に，$t = 0$ を除けば $\mathbf{X}(s, t)$ は曲面の正則表示を与える．接線曲面は $t > 0$ の部分と $t < 0$ の部分に別れ，曲線 $\mathbf{x}(\mathbf{R})$ は接線曲面の特異点集合となる [Figure 10.4].

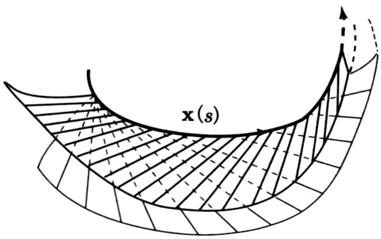


Figure 10.4

第 2 基本形式は

$$(h_{ij}) = \begin{pmatrix} -t\kappa\tau & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

従って，Gauss 曲率は至るところ 0 で，

$$U = \{\mathbf{X}(s, t) \mid t \neq 0,\ \tau \neq 0\}, \qquad A = \{\mathbf{X}(s, t) \mid t \neq 0,\ \tau = 0\},$$
$$\partial\mathcal{S} = \{\mathbf{x}(s) \mid s \in \mathbf{R}\}.$$

例 10.25　単位球面 $\mathbf{S}^2 \subset \mathbf{R}^3$ 上の曲線 $\mathbf{x} : \mathbf{R} \to \mathbf{S}^2$ の Frenet 標構を

$$\mathbf{x}' := \xi_1, \qquad \xi_1' = \kappa\xi_2, \qquad \xi_2' = -\kappa\xi_1 + \tau\xi_3, \qquad \xi_3' = -\tau\xi_2$$

とする．原点を頂点として，この曲線によって生成される錐面 $\mathcal{S}$ の正則表示は

$$\mathbf{X} : \mathbf{R} \times (0, \infty) \to \mathbf{R}^3, \qquad \mathbf{X}(s, t) := t\mathbf{x}(s) \qquad ((s, t) \in \mathbf{R} \times (0, \infty))$$

である．このとき

$$\mathbf{X}_1 := \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s}, \qquad \mathbf{X}_2 := \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}, \qquad \mathbf{e} = \xi_1 \times \mathbf{x},$$
$$\mathbf{X}_{11} = t\kappa\xi_2, \qquad \mathbf{X}_{12} = \xi_1, \qquad \mathbf{X}_{22} = 0$$

を得る．ここで $\alpha,\, \beta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ を満たす滑らかな関数として

$$\mathbf{x}(s) = \alpha(s)\xi_2(s) + \beta(s)\xi_3(s)$$

によって定めると，$\mathbf{x}$ が球面曲線だから $\mathbf{x}'(s) = \xi_1(s)$ より

$$\alpha\kappa + 1 = 0 \Longrightarrow \alpha = -\frac{1}{\kappa}, \qquad \mathbf{e} = \alpha\xi_3 - \beta\xi_2$$

が成立している．従って一般性を失うことなく，以下のようにおいてよい：

$$\mathbf{x} = -\frac{1}{\kappa}\xi_2 + \sqrt{1-\kappa^{-2}}\,\xi_3, \qquad \mathbf{e} = -\frac{1}{\kappa}\xi_3 - \sqrt{1-\kappa^{-2}}\,\xi_2.$$

Gauss の方程式を用いて Christoffel 記号を求めると：

$$\begin{aligned}
&\Gamma^1_{22} = \Gamma^2_{22} = h_{22} = 0,\\
&\Gamma^2_{11} = -t, \qquad \Gamma^1_{11} = 0, \qquad h_{11} = -t\sqrt{1-\kappa^{-2}}\,\kappa,\\
&\Gamma^1_{12} = \frac{1}{t}, \qquad \Gamma^2_{12} = 0, \qquad h_{12} = 0.
\end{aligned}$$

従って第 1 基本形式と第 2 基本形式は

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (h_{ij}) = \begin{pmatrix} -t\kappa\sqrt{1-\kappa^{-2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

これから $\kappa_1 = \dfrac{h_{11}}{g_{11}} = -\dfrac{\kappa\sqrt{1-\kappa^{-2}}}{t}$, $\kappa_2 = 0$．従って

$$\begin{aligned}
&K = 0, \qquad H = -\frac{\kappa\sqrt{1-\kappa^{-2}}}{2t},\\
&U = \{\mathbf{X}(s,\, t) \mid t > 0,\, \kappa(s) > 1\},\\
&A = \{\mathbf{X}(s,\, t) \mid t > 0,\, \kappa(s) = 1\}
\end{aligned}$$

を得る．更に $\partial\mathcal{S} = \left\{ \lim_{t \to 0} \mathbf{X}(s,\, t) \,\middle|\, s \in \mathbf{R} \right\}$ で原点が $\mathcal{S}$ の境界となる．

10.4.1　平坦曲面上の漸近線

必ずしも完備でない平坦曲面 $\mathcal{S}$ 上で定理 10.21 を証明しよう．点 $p \in A$ が A に含まれる近傍 $V(p) \subset A$ を持てば，定理 10.16 によって $V(p)$ は平面の一部である．A の各成分が開核を持てば，それらは平面の一部となる．

補題 10.26　必ずしも完備でない平坦曲面 $\mathcal{S}$ 上で $U_1 \subset U$ を 1 つの連結成分とせよ．$p \in U_1$ の近傍 $U(p) \subset U_1$ の任意の点 $q \in U(p)$ を通る漸近線は 1 本存在して，それは曲率線であり，M の測地線でもあって，かつ $\mathbf{R}^3$ の直線に含まれる．

証明　漸近方向ベクトルを $\alpha^i \mathbf{X}_i$ とおけば $h_{ij}\alpha^i\alpha^j = 0$ を満たす．$\mathrm{rank}(h_{ij}) = 1$ が U_1 上で成立するから，$h_{11} \neq 0$ と仮定してよい．このとき

$$0 = h_{11}\Big(t + \frac{h_{12}}{h_{11}}\Big)^2 + \frac{\det(h_{ij})}{h_{11}} = h_{11}\Big(t + \frac{h_{12}}{h_{11}}\Big)^2.$$

ここに，$t := \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$, $\alpha_2 \neq 0$ とおいた．故に $\dfrac{-h_{12}}{h_{11}}\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2$ は漸近方向に接する U_1 内で滑らかなベクトル場となる．このベクトル場は主曲率が 0 の主曲率方向と一致する．U_1 内では異なる主曲率が存在し，定理 4.25 によって曲率線が座標曲線となる正則表示 $\mathbf{x}(u_1, u_2)$ がとれる．このとき，$h_{ij}du^i du^j = L(du_1)^2$ だから

$$(h_{ij}) = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

命題 4.23 から主曲率 κ_1, κ_2 は $\kappa_1 = \dfrac{L}{g_{11}}$ および $\kappa_2 = 0$ である．異なる主曲率に対する主曲率方向は直交するから $\mathcal{S}$ の第 1 基本形式は $I = g_{11}(du_1)^2 + g_{22}(du_2)^2$ である．Codazzi の方程式 (5.2.5) に $i = j = 2$, $k = 1$ を代入して $\Gamma^1_{22}h_{11} = 0$ を得る．仮定より $h_{11} \neq 0$ だから

$$0 = \Gamma^1_{22} = -\frac{\partial_1 g_{22}}{2g_{11}}.$$

故にある関数 $\overline{v} := \overline{v}(v)$ が存在して $g_{22}(dv)^2 = (d\overline{v})^2$ となるから，$I = g_{11}du^2 + dv^2$ と書ける．この関数 v は漸近線 $u = \mathrm{const.}$ に沿う弧長となる．更に (5.2.5) に $i = j = 1$, $k = 2$ を代入して $\partial_2 L - \Gamma^1_{12}L = 0$ を得る．よって

$$\frac{L_v}{L} = \frac{{g_{11}}_v}{2g_{11}}.$$

更に，$\Gamma^2_{22} = \Gamma^1_{22} = 0$ から $\mathbf{X}_{22} = 0$ を得る．よって漸近線は直線の一部分となる．　∎

補題 10.27　$U(p)$ 内の漸近線 $u = \mathrm{const.}$ に沿って平均曲率 H は

$$\frac{d^2}{dv^2}\Big(\frac{1}{H}\Big) = 0 \tag{10.4.2}$$

を満たす．

証明　Gauss の公式 (5.3.1) から

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\right].$$

上式に $G \equiv 1$ と $E = g_{11}$ を代入して

$$\frac{\partial^2 \sqrt{g_{11}}}{\partial v^2} = 0$$

を得る．従って $\sqrt{g_{11}} = c_1(u)v + c_2(u)$ を満たす関数 $c_1(u)$, $c_2(u)$ がとれる．Codazzi の方程式 (5.2.5) から

$$\frac{L_v}{L} = \frac{{g_{11}}_v}{2g_{11}} \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial v}(\log L) = \frac{\partial}{\partial v}(\log\sqrt{g_{11}}).$$

故に $L = \sqrt{g_{11}}\,c_3(u)$ を満たす関数 $c_3(u)$ が存在し，これより平均曲率 H は

$$2H = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2} = \frac{L}{g_{11}} = \frac{c_3(u)\sqrt{g_{11}}}{g_{11}}.$$

従って

$$H = \frac{c_3(u)}{2(c_1(u)v + c_2(u))}. \tag{10.4.3}$$

■

定理 10.21 の証明をしよう．

定理 10.21 の証明　点 $p \in U \subset \mathcal{S}$ を任意に固定し，この点を通る漸近線を $\sigma(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$ とおく．ここに区間 (α, β) は p を通る漸近線が定義される最大の区間とする．上の補題から，ある定数 a, b, c が存在して平均曲率が σ に沿って

$$H \circ \sigma(t) = \frac{a}{bt + c} \neq 0.$$

もしも $\alpha > -\infty$ ならば極限点 $\lim_{t\to\alpha} \sigma(t)$ は $\mathcal{S}$ の境界点であるか，または $\mathcal{S}$ 上の U の境界点である．このとき，

$$\lim_{t\to\alpha} H \circ \sigma(t) = \pm\infty$$

を得る．実際，この極限点が $\mathcal{S}$ 上にあれば $H \circ \sigma(t)$ の $t \to \alpha$ としたときの極限値が 0 でないから

$$\lim_{t\to\alpha} \sigma(t) \in U$$

となって，漸近線は $t = \alpha$ を超えて更に延長できる．これは α の選び方に反す

る．同様にして，もしも $\beta < \infty$ ならば

$$\lim_{t\to\beta} H \circ \sigma(t) = \pm\infty$$

となる．いずれの場合も $\lim_{t\to\alpha} \sigma(t) \in \partial\mathcal{S}$ または $\lim_{t\to\beta} \sigma(t) \in \partial\mathcal{S}$ となる． ∎

注意 10.28 M が完備ならば U の各点を通る極大漸近線は $\mathbf{R}^3$ 内の直線である．従って極大漸近線に沿って (10.4.3) が全ての実数 $v \in \mathbf{R}$ に対して成り立つから $c_1(u) = 0$ となって，平均曲率は一定である．

定理 10.22 の証明 $p \in U'$ を任意の点とすると，U の点列 $\{p_n\} \subset U$ で p に収束するものがとれる．この点列が U の 1 つの連結成分に属していれば殆ど自明である．ここでは，p_n を含む U の連結成分は全て互いに異なるかも知れないことに注意する．

注意 10.28 から，p_n を通る漸近線 $\ell_n : \mathbf{R} \to U$ で $p_n = \ell_n(0)$ を満たすものは $\mathbf{R}^3$ の直線である．直線族 $\{\ell_n\}$ の $\mathbf{R}^3$ における極限を $\ell : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ とおく．ℓ_n は M の測地線で，測地線の解は初期条件に関して連続的に依存する．従って点列 $\{\ell_n(t)\}$ は M の完備性から M 上の点 $\ell(t)$ に収束する．すなわち

$$\ell(0) = p, \qquad \ell(t) = \lim_{n\to\infty} \ell_n(t) \in M \qquad (\ell_n(t) \in U,\, t \in \mathbf{R}).$$

漸近線 ℓ_n に沿って平均曲率は $\mathbf{R}$ 全体で定義されるから，注意 10.28 から，定数 $a_n := H(p_n) \neq 0$ が存在して $H \circ \ell_n(t) = a_n$，従って

$$H \circ \ell(t) = \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

すなわち，$\ell(t) \in U'$ が示された． ∎

問 10.29 定理 10.22 は完備性を仮定しなくても成り立つ．すなわち，定理 10.22 は『必ずしも完備でない平坦曲面 $\mathcal{S}$ に対して，$U' \setminus \partial\mathcal{S}$ の各点を通る極大線分 (半直線または直線を含む) で U' に完全に含まれるものが一意的に存在する』となる．この事実を証明せよ．

定理 10.19 を証明するための準備をしよう．U の任意の連結成分を U_0, U_1 とし，M の 2 本の漸近線を $\sigma_i : \mathbf{R} \to U_i\ (i = 0, 1)$ とする．2 次元 Riemann 多様体 M の上では U_0, U_1 は明確に区別できるが，等長はめ込みの像としては，これらは共通点を持つかも知れない．補題 10.26 と補題 10.27 により，これらは $\mathbf{R}^3$ の直線で捻れの位置にあれば交点を持たない．もしもこれら 2 直線が交

点を持てば，以下の補題 10.30 によって矛盾となる．このとき $\sigma_0(t)$ $(t \in \mathbf{R})$ から $\sigma_1(\mathbf{R})$ への $\mathbf{R}^3$ での距離関数

$$\rho(t) := \inf_{s\in\mathbf{R}} \|\sigma_0(t) - \sigma_1(s)\| \qquad (t \in \mathbf{R})$$

は**非負の最小値をとる凸関数**となることに注目する．以下の補題が成立する．

補題 10. 30　2 直線 $\sigma_0(\mathbf{R})$ と $\sigma_1(\mathbf{R})$ は $\mathbf{R}^3$ 内で平行である．

証明　平行でないと仮定すると，ρ は一定でなく $\lim_{t\to\pm\infty} \rho(t) = \infty$ で，

$$\rho_M(t) := \inf_{s\in\mathbf{R}} d(\sigma_0(t), \sigma_1(s)) \geq \rho(t)$$

だから，ρ_M は最小値をとる．ここに d は Riemann 多様体 M の距離関数である．ρ_M の最小値を実現する点を原点とする直線のパラメータを選んで

$$\inf \rho_M = d(\sigma_0(0), \sigma_1(0)) =: \ell$$

とする．$\gamma : [0, \ell] \to M$ を最短測地線で $\gamma(0) := \sigma_0(0)$, $\gamma(\ell) := \sigma_1(0)$ を満たすとする．2 つのベクトル $\dot\sigma_0(0)$ と $\dot\sigma_1(0)$ は $\mathbf{R}^3$ 内では 1 次独立であるが，M の Riemann 接続に関しては γ に沿って平行である．E は γ に沿う単位平行ベクトル場で $E(0) := \dot\sigma_0(0)$ を満たすとき，$E(\ell) = \dot\sigma_1(0)$ である．例 9.49 で示したように，γ の変分

$$V(t, s) := \exp_{\gamma(t)} sE(t) \qquad ((t, s) \in [0, \ell] \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0))$$

は M の平坦性により変分曲線の長さは全て $\ell = L(\gamma)$ に等しく，$V : [0, \ell] \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to M$ は等長的埋め込みである．従って

$$\rho_M(\varepsilon) = d(\sigma_0(\varepsilon), \sigma_1(\varepsilon)) \leq L(V_\varepsilon) = \ell$$

が任意の $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ に対して成立し，ρ_M は $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ 上で，従って $\mathbf{R}$ 全体の上で一定となる (注意 10.31 参照)．上に有界な $\mathbf{R}$ 上の凸関数は定数だから，$\dot\sigma_0(0)$ と $\dot\sigma_1(0)$ は $\mathbf{R}^3$ 内で平行となって仮定に反する．∎

注意 10. 31　補題 10.30 の証明の最後の部分は大域的考察によく用いられる手法なので詳しく説明しよう．ρ_M の最小値 ℓ を実現するパラメータ全体の集合を $\mathbf{I} = \{s \in \mathbf{R} \,|\, \rho_M(s) = \ell\}$ とおく．補題 10.30 の証明から，$\mathbf{I}$ は $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ を含み，従って $\mathbf{I} \neq \emptyset$ である．更に，$s \in \mathbf{I}$ が $s > 0$ ならば $[0, s] \subset \mathbf{I}$，$s < 0$ ならば $[s, 0] \subset \mathbf{I}$ が解る．$\mathbf{I} = \mathbf{R}$ の証明には $\mathbf{I}$ が開かつ閉な区間であることを主張すればよい．同値な主張として

$$\sup_{s\in\mathbf{I}} s = \infty \quad \text{かつ} \quad \inf_{s\in\mathbf{I}} s = -\infty$$

を示してもよい．ここでは $s_* := \sup_{s\in\mathbf{I}} s < \infty$ を仮定して矛盾を導く．

仮定より $\rho_M(s_*) = \ell$ は ρ_M の最小値だから，$\gamma_* : [0, \ell] \to M$ を $\gamma_*(0) := \sigma_0(s_*)$ と $\gamma_*(\ell) := \sigma_1(s_*)$ を結ぶ最短測地線とすると

$$\langle \dot\gamma_*(0), \dot\sigma_0(s_*)\rangle = \langle \dot\gamma_*(\ell), \dot\sigma_1(s_*)\rangle = 0$$

が成り立つ．γ_* に沿う M の単位平行ベクトル場 E_* を $E_*(0) := \dot\sigma_0(s_*)$ と定義すると，明らかに $E_*(\ell) = \dot\sigma_1(s_*)$ である．

補題 10.30 の証明に用いた変分 $V_* : [0, \ell] \times (-\varepsilon + s_*, \varepsilon + s_*) \to M$ を γ_* に沿って

$$V_*(t, s) := \exp_{\gamma_*(t)}(s - s_*)E_*(t)$$

と定義する．

このとき，V_* の変分曲線の長さは全て ℓ に等しく，従って

$$\rho_M(s_* + \varepsilon) = d(\sigma_0(s_* + \varepsilon), \sigma_1(s_* + \varepsilon)) = \ell$$

となって，$[0, s_* + \varepsilon] \subset \mathbf{I}$ を得る．これは $s_* = \sup_{s\in\mathbf{I}} s$ に矛盾して，$s_* = \infty$ が示された．同様にして $\inf_{s\in\mathbf{I}} s = -\infty$ も成り立つ．

定理 10.19 の証明　補題 10.30 によって U の各点を通る漸近線は全て $\mathbf{R}^3$ 内で互いに平行な直線である．従って $U' := U^b \setminus U$ の各点を通り U' に含まれる直線も漸近線に $\mathbf{R}^3$ 内で平行である．V を開核が空でない A の連結成分とすると，$\partial V \subset U'$ だから定理 10.16 により V は帯状平面 $\mathbf{R} \times [a, b]$ または半平面 $\mathbf{R} \times [0, \infty)$ と合同となる．いずれの場合も，V の各点を通り漸近線に平行で V に含まれる直線がただ 1 本存在する．よって M は柱面であることが証明された．∎

問 10. 32　必ずしも完備でない $\mathcal{S}$ の任意の漸近線に沿って，接平面は一定であることを示せ．

問 10. 33　例 10.9 において，$\mathbf{R}^3$ の原点に関する対称変換は M 上の固定点を持たない等長変換 $\tau : M \to M$, $\tau^2 = \mathrm{id.}$ を引き起こす．M の $\{\tau, \tau^2 = \mathrm{id.}\}$ による商空間 $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}/\{\tau, \mathrm{id.}\}$ を**平坦な開 Möbius 帯** (open Möbius strip) という．平坦な開 Möbius 帯は $\mathbf{R}^3$ に等長的にはめ込むことは不可能であること

を示せ．

例 10.34 (円錐面の平面上への展開)　展開の様子の卑近な例としては：呉服屋さんで反物を買うとき，円筒型に巻かれた反物を畳の上に広げて柄を見せてくれるだろう．これが展開の具体例である．平坦曲面の平面への展開について，円錐面と円柱の具体例で解説し，解説を通じて被覆空間や基本群の具体的なイメージがこれらの例からつかめるようにしたい．

例 9.49 で単位球面 $\mathbf{S}^2 \subset \mathbf{R}^3$ 上の半径が $\varphi \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ の小円 $\mathbf{x} : \mathbf{R} \to \mathbf{S}^2$ が生成する円錐面 $\mathcal{S}$ の頂点を xy-平面 Π の原点 O におき，$\mathcal{S}$ の 1 つの漸近線 $\alpha : (0, \infty) \to \mathcal{S}$, $\alpha(0) := O$, $\|\dot{\alpha}\| = 1$ を x 軸の正の部分に重ねておく．このとき，$\alpha(t)$ は Π の点 $(t, 0)$ と重なっている．$\mathcal{S}$ を滑らせることなく Π 上をゴロゴロと回転させる．α 上の点 $\alpha(1) =: \mathbf{x}(0)$ にインクで印をつけて回転させるとき，この点が Π に触れる度毎にインクのマークが周期的に Π 上に印されるだろう．$\mathcal{S}$ の頂点は常に O にあり，回転で動かない．従ってマークされる点は O を中心とする単位円周上にある．k 回回転を続けるとき，Π 上には $k+1$ 個のマークが印されるだろう．k 回逆回転のときは $k < 0$ の整数で表すとしよう．無限回回転を続けるとき，$\sin\varphi$ が有理数ならば有限個の点がマークされる．$\sin\varphi$ が無理数ならば，単位円周上の至るところ稠密な可算無限個の点が印される．ここで，頂点は $\mathcal{S}$ の点ではないことに注意しておく．このようにして $\mathcal{S}$ は平面内に展開される．展開は**局所的に等長写像**であることも解る．

円柱面 $\mathcal{S}'$ の正則表示 $\mathbf{x} : [0, 2\pi) \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ を $\mathbf{x}(\theta, t) := (\cos\theta, \sin\theta, t)$ とする．漸近線 $\alpha : \mathbf{R} \to \mathcal{S}'$ を $\alpha(0) := (1, 0, 0)$, $\alpha(t) = (1, 0, t)$ として，Π は $(1, 0, 0)$ を通り x 軸に垂直な平面とせよ．漸近線 $\alpha(\mathbf{R})$ は z 軸に平行な直線 $t \mapsto (1, 0, t)$ に重ね合わせて置いた．呉服屋さんで反物を広げて見るときのように，この円柱面 $\mathcal{S}'$ を y 軸方向に滑ることなく転がせば $\mathcal{S}'$ を Π の上に展開できる．円錐面のときのように点 $\alpha(0) = (1, 0, 0)$ にインクでマークをつけて k 回転がすと，$k+1$ 個の点 $(1, 0, 0), (1, 2\pi, 0), \cdots, (1, 2k\pi, 0)$ にマークがつく．このようにして円柱面が平面の上へ展開され，展開は**局所的に等長写像**であることも解る．

10.5 平坦曲面の平面への展開

$\mathcal{S} \subset \mathbf{R}^3$ は必ずしも完備でない連結な平坦曲面で，$\mathcal{S} = U \cup A$ かつ $U \neq \emptyset$, $A \neq \emptyset$ を満たすとせよ．この $\mathcal{S}$ を平面 $\Pi \subset \mathbf{R}^3$ に展開しよう．

定理 10.21 によって U の各点 $\iota(p) \in U$ を通る極大漸近線 $\ell_p : (\alpha, \beta) \to U$ は弧長をパラメータにとる．曲率線を座標曲線とする正則表示をとると，

$$\ell_p(v) = \mathbf{x}(u_0, v), \qquad \dot{\ell}_p(v) = \mathbf{x}_2(u_0, v) \qquad (v \in (\alpha, \beta))$$

と表せる．ℓ_p に沿って $\mathcal{S}$ の接平面は一定である．この事実は，0 でない主曲率 $\left(= \dfrac{h_{11}}{g_{11}}\right)$ に接する単位ベクトル場 $\dfrac{\mathbf{x}_1}{\sqrt{g_{11}}}$ を ℓ_p に沿って微分して

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\mathbf{x}_1(u_0, v)}{\sqrt{g_{11}(u_0, v)}}\right) = 0 \qquad (v \in (\alpha, \beta))$$

を確認して解る．定理 10.22 が，必ずしも完備でない平坦曲面に対しても成り立つから，$\iota(q) \in U'$ を通る極大線分 (これは極大漸近線の極限として得られたもの) に対しても接平面が一定である．$p \in U^b$ を通る極大線分を $\ell_p : (\alpha, \beta) \to U^b$ と書く．もちろん，ℓ_p は半直線または直線であってもよい．

A° の各成分は平面に含まれるから，これを Π 上に展開することは，ただ単に Π 上にこれをおくだけだから，問題はない．

U^b 内の十分に近い任意の 2 点 $\iota(p), \iota(q) \in U^b$ を通る異なる極大線分 ℓ_p と ℓ_q によってはさまれた $\mathcal{S}$ の領域を Π 上に展開しよう．これができれば，$\mathcal{S}$ 全体が Π に展開できることになる．しかし，円錐面の例 10.34 で見たように，ℓ_p, ℓ_q が互いに平行であることは期待できない．有界閉区間 $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$ を固定する．Π を $T_p\mathcal{S}$ と同一視すると，$\ell_p \subset \Pi$ で ℓ_p 上の各点で $\mathcal{S}$ の接平面は Π である．ℓ_p に直交する滑らかなベクトル場 P と M(または $\mathcal{S}$) の測地線 $c_s : [0, 1] \to \mathcal{S}$ を以下で定義する [Figure 10.5]：

$$\exp_{\ell_p(s)} P(s) \in \ell_q, \qquad c_s(t) := \exp_{\ell_p(s)} tP(s) \qquad (s \in [a,b],\, t \in [0,1]).$$

第 2 変分公式から

$$\frac{d^2}{ds^2}\|P(s)\| = \frac{d^2}{ds^2} L(c_s) = 0 \qquad (s \in [a, b])$$

となって，$L(c_s)$ は s に関する 1 次関数となる．さらに，$\dot{c}_s(1)$ と $\dot{\ell}_q$ との角は $s \in [a, b]$ 上で一定となる．同様にして，$c_a(t_0) \in U^b$ を満たす任意の $t_0 \in (0, 1)$ に対して，$\dot{c}_s(t_0)$ と $\dot{\ell}_{c_a(t_0)}$ のなす角度も $s \in [a, b]$ 上で一定となる．4 本の測地線

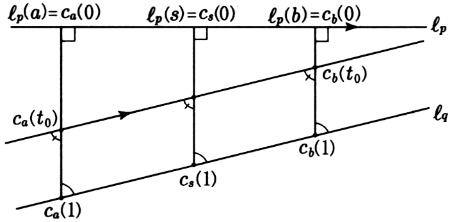


Figure 10.5

$\ell_p[a, b]$, $c_a[0, t_0]$, $\ell_{c_a(t_0)}[a, b]$, $c_b[0, t_0]$ で囲まれた $\mathcal{S}$ の領域 $\square(\ell_p, c_a, \ell_q, c_b)$ は平面内の台形に等長的となる．

最後に，$c_a[0, 1] \subset \mathbf{R}^3$ を空間曲線とみなし，$\mathcal{S}$ の領域 $\square(\ell_p, c_a, \ell_q, c_b)$ を線分 $\ell_{c_a(t_0)}$ が Π に含まれるように $c_a[0, t_0]$ を真直ぐに伸ばせば $\square(\ell_p, c_a, \ell_q, c_b)$ が Π に含まれる台形の上に展開される．このとき，$\ell_{c_a(t_0)}$ に沿って接平面が一定だから $\ell_{c_a(t_0)}$ 上の各点で接平面が Π に重ね合わされる．このようにして，ℓ_p, ℓ_q で囲まれた $\mathcal{S}$ の領域が Π に展開される．

10.5.1　平坦曲面の普遍被覆空間と基本群

円錐面 $\mathcal{S}$ を無限回展開して得られた展開図を $\mathcal{S}^*$ とせよ．円錐面 10.34 の例から解るように $\mathcal{S}^*$ は Π そのものではない．$\mathcal{S}^*$ を表すために Riemann 面を用いる：

$$\mathcal{S}^* = \{z = r\exp(\sqrt{-1}\,\theta) \,|\, r > 0,\ \theta \in \mathbf{R}\}. \qquad (10.5.1)$$

$\mathcal{S}^*$ を表す座標空間 $\{(r, \theta) \,|\, r > 0,\ \theta \in \mathbf{R}\}$ は開半平面だから，$\mathcal{S}^*$ は**単連結**である．

上述の複素数表示は $\mathcal{S}$ の局所座標系としても使える．実際に，領域 $D := \{(r, \theta) \,|\, r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi\}$ と定め，$\mathbf{x} : D \to \mathbf{R}^3$ を

$$\mathbf{x}(r, \theta) := r\begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad ((r, \theta) \in D)$$

とおけば，$\mathbf{x}(D)$ は $\mathcal{S}$ の回転軸を z 軸の正の部分においたときの $\mathcal{S}$ の正則表示である．このとき，$\mathcal{S}$ 上の任意の点 $p = \mathbf{x}(r_0, \theta_0)$ $((r_0, \theta_0) \in D)$ に対して $\widetilde{p}_0 \in \mathcal{S}^*$ を $\widetilde{p}_0 := r_0\exp(\sqrt{-1}\,\theta_0)$ とおくと，この点は $\mathcal{S}$ が Π 上で 1 回転する間に p が Π に触れる点に他ならない．$k \in \mathbb{Z}$ として (向きを込めて) $\mathcal{S}$ を Π 上

で k 回回転させたときに p が Π 上にマークされる点を順次 $\widetilde{p}_0, \widetilde{p}_1, \cdots, \widetilde{p}_{k-1}$ とおくと，

$$\widetilde{p}_m = r_0 \exp(\sqrt{-1}\,(\theta_0 + 2m\pi)) \qquad (m = 1, \cdots, k-1)$$

となる．従って p のまわりの十分小さい $\varepsilon > 0$ 近傍を

$$U_\varepsilon(p) := \left\{ \mathbf{x}(r, \theta) \,\middle|\, \frac{r_0}{2} < r < \frac{3r_0}{2}, \quad \theta_0 - \varepsilon < \theta < \theta_0 + \varepsilon \right\}$$

とすると，展開は局所的に等長写像だから，各々の $k \in \mathbb{Z}$ に対して，$\widetilde{p}_k$ のまわりの近傍 $\widetilde{U}_\varepsilon(\widetilde{p}_k)$ で $U_\varepsilon(p)$ が k 回目の回転によって $\mathcal{S}^*$ にマークされたものが存在し，それらは互いに交わらない：

$$\widetilde{U}_\varepsilon(\widetilde{p}_i) \cap \widetilde{U}_\varepsilon(\widetilde{p}_j) = \emptyset \qquad (i \neq j).$$

故に，局所的な等長写像 $\pi : \mathcal{S}^* \to \mathcal{S}$ で，任意の点 $p \in \mathcal{S}$ に対して，p の近傍 $U_\varepsilon(p)$ と $\pi^{-1}(\{p\})$ の各点 $\widetilde{p}_k$ のまわりの近傍 $\widetilde{U}_\varepsilon(\widetilde{p}_k)$ で

$$\pi|_{\widetilde{U}_\varepsilon(\widetilde{p}_k)} : \widetilde{U}_\varepsilon(\widetilde{p}_k) \longrightarrow U_\varepsilon(p) \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

が等長写像となるものが存在する．これは定義 8.76 によって $\mathcal{S}$ の**普遍被覆写像**である [Figure 10.5.1].

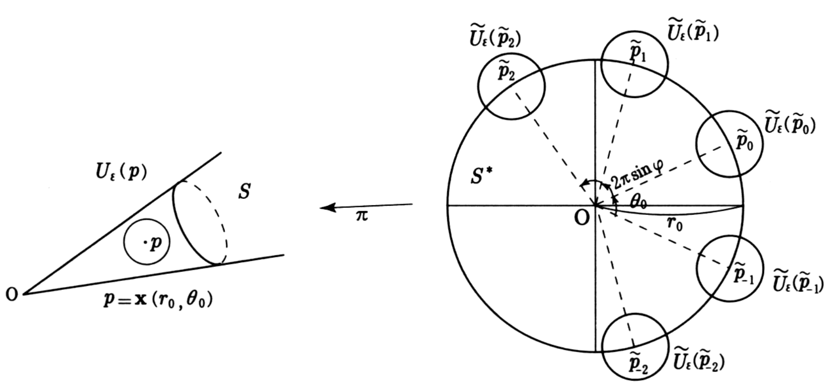


Figure 10.5.1

円錐面 $\mathcal{S}$ 上の点 $q := \alpha(1) = \mathbf{x}(1, 0)$ を始点とする平行円を $c(\theta) := \mathbf{x}(1, \theta)$ $(\theta \in [0, 2\pi))$ とおく．c は長さ $2\pi \sin\varphi$ の円である．この円全体にマークをつけて $\mathcal{S}$ を無限に回転させたとき，$\mathcal{S}^*$ 内の曲線 $\widetilde{c} : \mathbf{R} \to \mathcal{S}^*$ は $\widetilde{c}(\theta) = \exp(\sqrt{-1}\,\theta)$ で与えられる．$\mathcal{S}$ 内の領域 U で，普遍被覆写像の逆写像 $\pi^{-1} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}^*$ が $\pi^{-1}(U)$

の各々の連結成分の上で同相となる，互いに素な領域 $\widetilde{U}_k$ $(k \in \mathbb{Z})$ に分解する最大のものを**基本領域**という．$\mathcal{S}$ の基本領域は $\mathbf{x}(D^\circ)$ で，

$$\mathbf{x}(D) = \mathcal{S}, \qquad \mathbf{x}(D^b) \setminus \mathbf{x}(D^\circ) = \alpha(\mathbf{R})$$

が成り立つ．$\mathcal{S}$ を Π 上で $k\,(k \in \mathbb{Z})$ 回回転させたときに U が印される領域を $\widetilde{U}_k$ とすると，全ての整数 $j,\, k \in \mathbb{Z}$ に対して $\widetilde{U}_j$ と $\widetilde{U}_k$ は等長的である．

8.8 節の議論から，$q = c(0)$ を基点とするループ空間 Ω_q のホモトピー類 $\Omega_q/\sim$ が基本群である．ここで，$c \in \Omega_q$ は Ω_q の任意の元が代表するホモトピー類を c の積によって表すことができる．実際，c のパラメータを逆向きに導入したループを c^{-1} と表すと，$\mathcal{S}$ を k 回回転して得られた Ω_q のループは $c * \cdots * c$ とホモトピー同値である．従って $\mathcal{S}$ の基本群 $\Pi_1(\mathcal{S})$ は $[c]$ とその積で生成されることがわかり，

$$\Pi_1(\mathcal{S}) \simeq \mathbb{Z}$$

を得る．

問 10.35　完備平坦曲面の普遍被覆空間が平面であることを用いて，Massey の定理 10.22 と定理 10.19 を証明せよ．

第11章　2次元完備開 Riemann 多様体の全曲率

Gauss-Bonnet の定理はコンパクトな曲面の曲率と位相を関係づける重要な結果である．しかし，完備非コンパクトな曲面上で Gauss 曲率を積分して得られた全曲率は位相不変量ではない．回転放物面や 2 葉双曲面の例で解るように，$\mathbf{R}^2$ 上で定義された計量が変われば全曲率も変わる．それでは完備非コンパクト曲面 M 上の全曲率は幾何的な意味はないのだろうか？　実は，M 上で滑らかな単純閉曲線の同心距離円の面積と周長に関する等周不等式の漸近的な展開式，半直線の測度，あるいは M の理想境界の大きさなどを定める量が全曲率であることが調べられている[17]．更に全曲率の存在が M 上の点の切断跡の構造に大きな影響を与えているが，ここでは言及しない．完備非コンパクトな曲面に対する全曲率の公式を得るためには，M の曲率積分および Euler 標数についてまず議論する必要がある．有限連結な完備開曲面の曲率積分に関する Cohn-Vossen の定理を証明し，Cohn-Vossen が証明した 2 次元完備非コンパクト Riemann 多様体の大域的な結果を解説する．Cohn-Vossen [5]，[6]が証明したすばらしい結果は，30 年以上の歳月を経て Toponogov，Gromoll，Cheeger，Meyer たちによって一般次元へ拡張された．有限連結でない完備曲面の全曲率に関する Huber の定理[11]を Morse 関数の性質と Cohn-Vossen の定理の証明の手法[5]を利用して解説する．全曲率に関するこれらの結果は平均曲率一定な曲面の研究にも利用されている．ここで M は連結完備非コンパクトな 2 次元完備 Riemann 多様体と約束する．

11.1　Cohn-Vossen の定理

定義 11.1　連結完備非コンパクトな 2 次元完備 Riemann 多様体 M に対して，コンパクト 2 次元多様体 N とその上の有限個の点 $\{p_1, \cdots, p_k\}$ が存在して M が $N \setminus \{p_1, \cdots, p_k\}$ と同相であるとき，M は**有限連結**であるという．このとき，M は k 個の**端点** (ends) を持つという．

M が有限連結のとき，M の Euler 標数 $\chi(M)$ は N の Euler 標数 $\chi(N)$ と N から除外された k 個の点を用いて

$$\chi(M) := \chi(N) - k \tag{11.1.1}$$

と定義する．曲面に可算無限個のハンドルをつけたり，または可算無限個の点を除外すれば，その曲面は有限連結ではない．有限連結ではない曲面上では Euler 標数が定義できない．

定義 11.2　完備非コンパクト 2 次元 Riemann 多様体 M の Gauss 曲率を K，面積素を dM とおく．広義積分 $\displaystyle\int_M K\,dM$ が $\pm\infty$ も込めて存在するとき，M の**全曲率**を

$$c(M) := \int_M K\,dM \tag{11.1.2}$$

によって定義する．

$C_1 \subset C_2 \subset \cdots$, $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i = M$ をコンパクト集合の単調増大列とすると，M の全曲率は $\{C_i\}$ のとり方によらずに

$$c(M) = \lim_{i\to\infty}\int_{C_i} K\,dM \tag{11.1.3}$$

で与えられる．$c(M)$ が存在するための必要十分条件は，$K_+ := \max\{K, 0\}$，$K_- := K - K_+$ とおくと，以下の不等式で与えられる：

$$\int_M K_+\,dM < \infty \quad \text{または} \quad \int_M K_-\,dM > -\infty.$$

定理 11.3 (Cohn-Vossen [5])　有限連結な M が全曲率を持てば，以下の不等式が成立する：

$$c(M) \leq 2\pi\chi(M). \tag{11.1.4}$$

以後，M は連結完備非コンパクトかつ有限連結な 2 次元 Riemann 多様体とする．N はコンパクト 2 次元多様体で，有限個の点 $p_1, \cdots, p_k \in N$ と同相写像 $\Phi : N \setminus \{p_1, \cdots, p_k\} \to M$ が与えられているとする．$p_i\,(i = 1, \cdots, k)$ における N の円板近傍 $U_N(p_i) \subset N$ をとって $U_N(p_i) \cap U_N(p_j) = \emptyset\,(i \neq j)$ とする．

このとき，$\Phi(U_N(p_i))$ を M の**チューブ** (tube)，$\Phi(N \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U_N(p_i))$ を M の**コア** (core) という．

$\{U_N^j(p_i)\}_{j=1,2,\cdots}$ を円板近傍の単調減少列で $\bigcap_{j=1}^{\infty} U_N^j(p_i) = \{p_i\}$ とするとき，$C_j := \Phi(N \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U_N^j(p_i))$ はコアの単調増大列で

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j = M, \qquad \chi(C_j) = \chi(M)$$

を満たす．各々のコア C_j の境界は k 個の単純閉曲線である．Gauss-Bonnet の定理を各々の C_j に適用し，$j \to \infty$ としたときの数列 $\{c(C_j)\}_{j=1,2,\cdots}$ の極限値が求まるように C_j の境界を上手に選ぶのが Cohn-Vossen のアイデアである．以下にこれを紹介する．

例 11.4 (全曲率の例)　以下に完備開曲面上の全曲率の例をあげよう．

(i)　平坦曲面は全曲率ゼロである．

(ii)　回転放物面 (例 9.34) の全曲率は 2π である．

(iii)　2 葉双曲面 (例 9.35) の全曲率は $2\pi(1-(1+k^2)^{-\frac{1}{2}})$ である．

(iv)　カテノイド回転面 (例 9.42) の全曲率は -4π である．

(v)　定曲率 -1 の双曲平面 $H^2(-1)$ の全曲率は $-\infty$ である．

11.1.1　長さを短縮するホモトピー変形

M のコアを C とし，$M \setminus C = U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_k$ を k 個のチューブとする．U_i の境界は単純閉曲線で $c_i : [0, 1] \to \partial U_i$ とし，$i(C)$ を C の基本弧長 (定義 9.28) とする．各 $i = 1, \cdots, k$ に対して $[0, 1]$ の分割：$0 = t_i^0 < t_i^1 < \cdots < t_i^{m(i)} = 1$ を小さくとって

$$c_i[t_i^{j-1}, t_i^{j+1}] \subset B(c_i(t_i^j), i(C)) \qquad (j = 1, \cdots, m(i),\ i = 1, \cdots, k)$$

とする．このとき，$c_i(t_i^{j-1})$ と $c_i[t_i^{j-1},\, t_i^j]$ の各点を結ぶ長さが $i(C)$ より小さい最短測地線分が一意的に存在する．各 $\lambda \in [0,\, 1]$ を固定し $u^j := (1-\lambda)t_i^{j-1} + \lambda t_i^j$ $(1 \leq j \leq m(i))$ とおいて $c_i(t_i^{j-1})$ と $c_i(u^j)$ を結ぶ最短測地線分を弧長に比例するパラメータをとって

$$\tau_{i,\lambda}^j : [t_i^{j-1},\, u^j] \longrightarrow M, \qquad \tau_{i,\lambda}^j(t_i^{j-1}) := c_i(t_i^{j-1}), \qquad \tau_{i,\lambda}^j(u^j) := c_i(u^j)$$

とおくと，$\tau_{i,1} := \tau_{i,1}^1 \cup \cdots \cup \tau_{i,1}^{m(i)}$ は $m(i)$ 個の点 $c_i(t_i^0),\, \cdots,\, c_i(t_i^{m(i)}) = c_i(t_i^0)$ を順次最短測地線分でつないで構成された測地 $m(i)$ 多角形となる．更に，$\lambda \in [0,\, 1]$ $(i = 1,\, \cdots,\, k)$ に対してホモトピー曲線を

$$\tau_{i,\lambda}(s) := \begin{cases} \tau_{i,\lambda}^j(s) & s \in [t_i^{j-1},\, u^j], \\ c_i(s) & s \in [u^j,\, t_i^j] \end{cases} \tag{11.1.5}$$

と定義する [Figure 11.1.1].

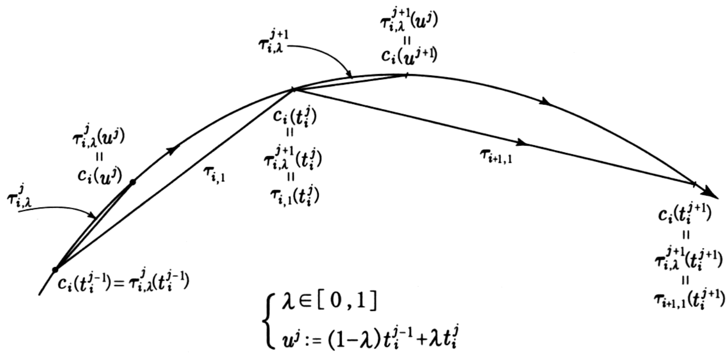


Figure 11.1.1

すなわち，連続写像 $H_i : [0,\, 1] \times [0,\, 1] \to M$ を $H_i(\lambda,\, s) := \tau_{i,\lambda}(s)$ $((\lambda,\, s) \in [0,\, 1] \times [0,\, 1])$ とおけば，構成方法から $H_i(0,\, s) = c_i(s)$, $H_i(1,\, s) = \tau_{i,1}(s)$ となって，H_i は c_i と $\tau_{i,1}$ の間のホモトピーを定義する．よって，境界曲線 c_i は長さが c_i より短い測地多角形 $\tau_{i,1}$ にホモトピックに変形された．この変形を**長さを短縮するホモトピー変形** (length decreasing deformation) とよぶ．

補題 11.5　M の閉曲線 c が長さを短縮するホモトピー変形によって測地多角形 τ に変形されたとき，以下が成立する．等号成立は $c = \tau$ で c が閉測地線のときに限る．

$$L(c) \geq L(\tau). \tag{11.1.6}$$

11.1.2　チューブの分類と性質

各々の $i = 1, \cdots, k$ に対して $\tau_{i,1}[0, 1]$ を境界とする M のチューブを再び U_i と書く．M のコア C の境界は $\partial C = \tau_{1,1}[0, 1] \cup \cdots \cup \tau_{k,1}[0, 1]$ である．境界 $\tau_{i,1}[0, 1]$ の $m(i)$ 個の頂点における内角を C に関して測って $\omega_i^1, \cdots, \omega_i^{m(i)}$ とおくと，Gauss-Bonnet の定理より

$$2\pi\chi(C) = \int_C K\, dM + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m(i)} (\pi - \omega_i^j) \tag{11.1.7}$$

が成立する．上式右辺の第 2 項はチューブの性質から評価することができる．

M のチューブを U とし，$c[0, 1] := \partial U$ は測地的多角形とする．$t \geq 0$ に対して U 内の閉曲線の族 $\mathcal{C}_t(U)$ を

$$\mathcal{C}_t(U) := \{a : [0, 1] \to U \mid d(a[0, 1], \partial U) \leq t,\ a \text{ は } c \text{ とホモトピック }\}$$

と定義する．任意の $a \in \mathcal{C}_t(U)$ に対し，$a[0, 1]$ を境界とするチューブで U に含まれるものが存在する．ここで関数 $\rho_U : [0, \infty) \to \mathbf{R}_+$ を

$$\rho_U(t) := \inf_{a \in \mathcal{C}_t(U)} L(a) \qquad (t \geq 0)$$

とおくと，$\rho_U(t) = L(c_t)$ を満たす $c_t \in \mathcal{C}_t(U)$ の存在が示される．

実際，$\mathcal{C}_t(U)$ に属する閉曲線の列 $\{c_j\}$ で $\lim_{j\to\infty} L(c_j) = \rho_U(t)$ をとる．十分大きい番号 j に対して $c_j[0, 1] \subset B(\partial U, t + L(\partial U))^b$ が成り立つ．$B(\partial U, t + L(\partial U))^b$ 上の基本弧長は正だから，$[0, 1]$ の分割をとって，各々の c_j が U^b 内でこの分割によって定まる長さを短縮するホモトピー変形によって測地多角形 τ_j に変形される．このとき，τ_j の頂点の個数は j に無関係に決まる．$L(c_j) \geq L(\tau_j)$ が十分大きい全ての j に対して成立する．従って，$\{\tau_j\}$ の各頂点から収束する部分列を順次とり出して $\lim_{j\to\infty} L(\tau_j) = \rho_U(t)$ かつ $\{\tau_j\}$ はある測地多角形 τ_t に収束するから $\rho_U(t) = L(\tau_t)$ となって，主張が示された．

補題 11.6　ρ_U は単調非増加で

$$|\rho_U(t_1) - \rho_U(t_2)| \leq 2|t_1 - t_2| \qquad (t_1, t_2 > 0)$$

が成立する．

証明　ρ_U が単調非増加であることは定義から明らか．

$c_{t_i} \in \mathcal{C}_{t_i}(U)\,(i=1,\,2)$ を $L(c_{t_i}) = \rho_U(t_i)$ を満たすようにとる．

$t_2 \geq t_1$ とする．$i = 1,\,2$ に対して，$c_{t_i}[0,\,1]$ 上の点 x_i で ∂U からの距離が t_i 以下のものが存在する．これをパラメータの原点にとって $x_i = c_{t_i}(0)$ とする．x_2 から ∂U への最短測地線上の点 y で $d(x_2,\,y) = t_2 - t_1$ を満たすものをとれば，$d(y,\,\partial U) \leq t_1$ である．最短測地線分 yx_2 と c_{t_2} をつないで，y を基点とする閉曲線 $yx_2 \cup c_{t_2} \cup x_2y$ を考えると，これは $\mathcal{C}_{t_1}(U)$ に属する．故に

$$2(t_2 - t_1) + L(c_{t_2}) \geq L(c_{t_1})$$

が成立する．ρ_U の単調非増加性から $L(c_{t_1}) \geq L(c_{t_2})$ だから

$$2(t_2 - t_1) + L(c_{t_1}) \geq L(c_{t_2})$$

は自明である [Figure 11.1.2].　■

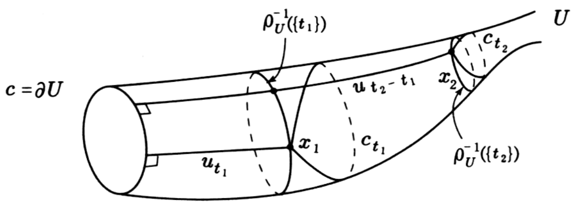


Figure 11.1.2

上の議論で $\rho_U(t) = L(c_t)$ を満たす $c_t\,:\,[0,\,1] \to U$ が測地的多角形であることがわかった．

次に c_t の頂点について調べよう．$c_t(u_0)$ が頂点ならば (すなわち，$\dot{c}_t(u_0+0) \neq \dot{c}_t(u_0-0)$ ならば)，$d(c_t(u_0),\,\partial U) = t$ または $c_t(u_0) \in \partial U$ が成立する．実際，もしも $d(c_t(u_0),\,\partial U) < t$ かつ $c_t(u_0) \in U$ が成立したと仮定する．U は開集合だから十分小さい $h > 0$ をとって $c_t[u_0 - h,\,u_0 + h] \subset U$ とできる．このとき，距離関数の三角不等式から

$$d(c_t(u_0-h),\,c_t(u_0+h)) < d(c_t(u_0-h),\,c_t(u_0)) + d(c_t(u_0),\,c_t(u_0+h))$$

となって，c_t より長さが短く c_t とホモトピックな $\mathcal{C}_t(U)$ 内の閉曲線を得る．これは矛盾である．

ρ_U の性質を用いると，M のチューブは以下の図形的性質によって 3 種類に分けられる．この用語は Busemann [2] による．

(i)　$\rho_U : [0, \infty) \to \mathbf{R}_+$ は一定で，U に含まれる任意の部分チューブ $V \subset U$ に対しても $\rho_V : [0, \infty) \to \mathbf{R}_+$ は一定である．このとき U を**拡大チューブ** (expanding tube) という．

(ii)　$\rho_U : [0, \infty) \to \mathbf{R}_+$ は一定で，ある部分チューブ $V \subset U$ に対して $\rho_V : [0, \infty) \to \mathbf{R}_+$ は単調減少である．このとき U を**樽型チューブ** (bulging tube) という．

(iii)　$\rho_U : [0, \infty) \to \mathbf{R}_+$ は単調減少である．このとき U を**縮小チューブ** (contracting tube) という．

我々の目的は M を覆うコアの単調増大列の構成だから，樽型チューブは縮小チューブにおきかえてよい [Figure 11.1.3].

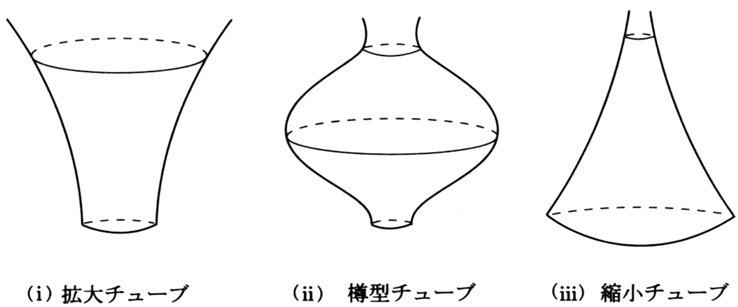


Figure 11.1.3

補題 11.7　M のチューブは以下の性質を持つ．

(i)　拡大チューブ U と $t > 0$ に対して $\rho_U(t) = L(c_t)$ を満たす測地多角形 $c_t : [0, 1] \to \overline{U}$ の頂点の 1 つを $c_t(u_0)$ とすれば，コアに関する $c_t(u_0)$ の内角は π 以下である．

(ii)　縮小チューブ U と $t > L(\partial U)$ に対して c_t は単純閉測地線または測地ループで，その頂点を $c_t(0) = c_t(1)$ として，コアを含む領域に関して測った $c_t[0, 1]$ の頂角を $\alpha(t)$ とおけば以下が成立する：

$$\alpha(t) \geq \pi, \qquad d(\partial U, c_t(u)) > t \qquad (\forall u \in (0, 1)).$$

証明　(i)　c_t の頂点が ∂U に属することは c_t の頂点の性質と拡大チューブの定義から解る．拡大チューブ U の頂点 $c_t(u_0) \in \partial U$ における内角が π よりも大と仮定して矛盾を導く．十分小さい $h > 0$ をとって $c_t[u_0 - h, u_0 + h] \setminus \{c_t(u_0)\} \subset U$ かつ $d(c_t(u), \partial U) \leq t$ $(u \in [u_0 - h, u_0 + h])$ を満たすようにできる．故に

$c_t[u_0-h,\, u_0+h]$ を 2 点 $c_t(u_0-h)$ と $c_t(u_0+h)$ を結ぶ最短測地線分でおきかえると，おきかえで得られた閉曲線は $\mathcal{C}_t(U)$ に属し，三角不等式からその長さが $\rho_U(t)$ より短くなって矛盾を生ずる．

(ii)　U を縮小チューブとする．ρ_U の単調性によって $c_t \in \mathcal{C}_t(U)$ 上のある点 $c_t(u_0)$ で $d(c_t(u_0),\, \partial U) = t$ が成立する．任意の $u \in [0,\, 1]$ に対して三角不等式から

$$\begin{aligned} d(c_t(u),\, \partial U) &\geq d(c_t(u_0),\, \partial U) - d(c_t(u_0),\, c_t(u)) \\ &\geq t - \frac{1}{2}L(c_t) > t - L(\partial U) > 0. \end{aligned} \tag{11.1.8}$$

故に $c_t(u_0)$ 以外の点は U に含まれ測地多角形の頂点ではないから，c_t は単純閉測地線であるかまたは $c_t(u_0)$ を基点とする測地ループとなる．c_t のパラメータを弧長に比例して $[0,\, 1]$ にとって，$p := c_t(0)$ を測地ループの基点とする．$d(p,\, \partial U)$ を実現する最短測地線を $\sigma : [0,\, t] \to M$, $\sigma(0) = p$, $\sigma(t) \in \partial U$ とおけば，$\sigma[0,\, t] \cap c_t[0,\, 1] = \{p\}$ が成立する．測地ループ c_t の頂角 $\alpha(t)$ を $c_t[0,\, 1]$ を境界とするチューブに関して測った内角とする．もしも $\alpha(t) > \pi$ と仮定すると，$\langle \dot\sigma(0),\, \dot c_t(0) \rangle > 0$ または $\langle \dot\sigma(0),\, -\dot c_t(1) \rangle > 0$ となって，第 1 変分公式から十分小さい $h > 0$ が存在して $d(c_t(h),\, \partial U) < t$ または $d(c_t(1-h),\, \partial U) < t$ を満たす．このとき，$c_t[h,\, 1-h]$ と 2 点 $c_t(h)$, $c_t(1-h)$ を結ぶ最短測地線によって構成された閉曲線は c_t とホモトピックで $\mathcal{C}_t(U)$ に属し，その長さは $L(c_t)$ より短い．これは c_t の性質 $L(c_t) = \rho_U(t)$ に矛盾する．よって $\alpha(t) \leq \pi$ が証明された．∎

補題 11.7 により拡大チューブ U の任意の部分チューブも拡大チューブで，その境界は長さを短縮するホモトピー変形によってコアに関して凸境界となる．縮小チューブ U の任意の部分チューブは縮小チューブで，その境界は測地ループまたは単純閉測地線である．従って縮小チューブの境界はコアに関して凹境界となる．

補題 11.8　U が縮小チューブのとき，$\rho_U(t) = L(c_t)$ を満たす測地ループ $c_t \in \mathcal{C}_t(U)$ の基点の内角 (コアを含む領域に関する) を $\alpha(t)$ とする．このとき，単調増大発散列 $\{t_j\}$ で以下の性質を満たすものが存在する：

$$\lim_{j\to\infty} \alpha(t_j) = \pi.$$

証明　$t>0$ を十分大きくとって，$U_t \subset U$ を U の部分チューブで $c_t[0,1] = \partial U_t$ とする．測地線 $\beta_t : [0, \varepsilon) \to U_t$ を

$$\beta_t(s) := \exp_{c_t(0)} \frac{\dot{c}_t(0) - \dot{c}_t(1)}{\|\dot{c}_t(0) - \dot{c}_t(1)\|} s \qquad (s \in (0, \varepsilon))$$

とおく．c_t とホモトピックな U_t 内で最短の長さを持つ測地ループを $\gamma : [0, 1] \to U_t$, $\gamma(0) = \gamma(1) = \beta_t(h)$ とおく．このとき，

$$d(\gamma(0), \partial U) \leq d(\gamma(0), c_t(0)) + d(c_t(0), \partial U) \leq t + h$$

だから

$$\rho_U(t+h) \leq L(\gamma)$$

が成り立つ．$h>0$ が 0 に十分近ければ，$\gamma[0, 1]$ と $c_t[0, 1]$ は近いから，第 1 変分公式を用いて ($\alpha(t) > \pi$ に注意して)

$$L(c_t) - L(\gamma) = -2h \cos\frac{\alpha(t)}{2} + [h^2] \qquad (h \in (0, \varepsilon))$$

が成り立つ．補題 11.6 から

$$2h \geq \rho_U(t) - \rho_U(t+h) \geq -2h\cos\frac{\alpha(t)}{2} + [h^2]$$

かつ ρ_U はリプシッツ連続だから殆ど全ての $t>0$ に対して ρ_U の微分が存在して

$$\rho_U'(t) \leq 2\cos\frac{\alpha(t)}{2}$$

が成り立つ．従って

$$\rho_U(t_1) - \rho_U(t_2) \leq 2\int_{t_2}^{t_1} \cos\frac{\alpha(t)}{2}\,dt \qquad (t_1 > t_2 > 0).$$

ここで t_2 を固定し，$t_1 \to \infty$ としたとき，積分の値は有界だから被積分関数は 0 に収束する単調増大発散列 $\{t_j\}$ を含む．実際，そうでないと仮定すれば，十分小さい $\eta > 0$ に対して $t_2 \gg 1$ が存在して，$\alpha(t) > \pi + \eta$ が全ての $t > t_2$ で成り立つ．このとき，上式右辺は $-\infty$ に発散するので $\rho_U(t) \to \infty$ となって，U が縮小チューブであることに矛盾する．∎

定理 11.3 の証明　$\varepsilon > 0$ を任意に固定する．M のコアの単調増大列 $\{C_j\}$ を以下の性質を満たすように選ぶ．

(i)　$M \setminus C_j$ の拡大チューブを $U_j^1 \cup \cdots \cup U_j^\ell$，縮小チューブを $V_j^1 \cup \cdots \cup V_j^m$ とおくと，

$$M \setminus C_j = U_j^1 \cup \cdots \cup U_j^\ell \cup V_j^1 \cup \cdots \cup V_j^m.$$

ここに，$k = \ell + m$ は M の端点の個数である．

(ii)　∂U_j^a $(a = 1, \cdots, \ell)$ は測地 $n(a)$ 多角形で，∂U_j^a の各頂点での内角をコアに関して測って $\omega_{j,1}^a, \cdots, \omega_{j,n(a)}^a$ とおけば以下を満たす：

$$0 < \omega_{j,i}^a \leq \pi \qquad (i = 1, \cdots, n(a)).$$

(iii)　∂V_j^d $(d = 1, \cdots, m)$ は測地ループで，∂V_j^d の基点で内角をコアに関して測って ω_j^d とおけば

$$\pi \leq \omega_j^d \leq \pi + \frac{\varepsilon}{k} \qquad (d = 1, \cdots, m)$$

を満たす．このとき，各々の $j = 1, \cdots$ に対して公式 (11.1.7) より

$$2\pi\chi(C_j) = c(C_j) + \sum_{a=1}^{\ell}\sum_{i=1}^{n(a)}(\pi - \omega_{j,i}^a) + \sum_{d=1}^{k}(\pi - \omega_j^d).$$

$c(M) = \lim_{j\to\infty} c(C_j)$ かつ補題 11.7, 11.8 より，$j \to \infty$ としたとき

$$c(M) \leq 2\pi\chi(M) + \varepsilon.$$

ε は任意だから証明終わり．　■

系 11.9 (Theorem 12：Huber [11])　M は完備非コンパクト有限連結な 2 次元 Riemann 多様体で有限面積を持つとせよ．もしも M が全曲率を許容すれば

$$c(M) = 2\pi\chi(M)$$

が成立する．

証明　M が拡大チューブを持てば面積は無限大となるから，全てのチューブは縮小チューブである．このとき，補題 11.8 より結論を得る．　■

注意 11.10　Gauss-Bonnet の定理や Cohn-Vossen の定理は向き付け可能でない 2 次元 Riemann 多様体に対しても成立する．2 次元完備 Riemann 多様体の Gauss 曲率が至るところ非負ならば，$\chi(M) = 0$, $\chi(M) = 1$ または $\chi(M) = 2$ である．特に，$\chi(M) = 0$ のときは，Gauss 曲率が恒等的にゼロとなって，M は平坦な柱面に等長的となるか，または平坦柱面を被覆空間とする開 Möbius 帯，平坦トーラス，または平坦な Klein の壷に等長的となる．

系 11.11 (Theorem 8：Cohn-Vossen [5])　2 次元完備 Riemann 多様体 M

の Gauss 曲率が至るところ正ならば，M は平面，球面または実射影平面のどれかと微分同相となる．

証明　仮定より $c(M) > 0$ だから $\chi(M) = 1$ または $\chi(M) = 2$ が成立する．このとき，曲面の分類から結論を得る．∎

11.2　Huber の定理

完備非コンパクト 2 次元 Riemann 多様体 M の全曲率が有界ならば，M は有限連結だろうか？　この問題は Huber の定理によって解決される．ここでは Cohn-Vossen の定理を応用して Huber の定理を証明しよう．証明の方針は以下の通りである：

H.Whitney のはめ込み定理を用いて n 次元多様体 M を $\mathbf{R}^{2n}$ にはめ込む．そのさい, Euclid 空間の線形関数をはめ込みに制限すると M 上の Morse exhaustion 関数が得られるように proper なはめ込みを構成する．ここでは，はめ込み定理 16.9 を仮定して Morse exhaustion 関数の存在を定理 11.14 で証明する．Whitney のはめ込み定理の証明は Appendix II で述べる．多様体の間の滑らかな写像に関する Sard の定理が証明に基本的であるが，ここでは証明を省く．詳細は松島与三先生のテキスト[14]を参照せよ．Whitney のはめ込み定理の証明を更に工夫すれば埋め込み定理が証明できるが，当初の目的に必要ないので，ここでは埋め込み定理の証明は割愛する．Auslander-MacKenzie [1]の第 6 章に詳しい証明がある．

定理 11.12 (Huber の定理[11])　有限連結でない完備非コンパクト 2 次元 Riemann 多様体 M が全曲率を許容すれば，$c(M) = -\infty$ が成立する．

Huber の定理の対偶として以下の系が成り立つ：

系 11.13　完備非コンパクト 2 次元 Riemann 多様体 M が有限の全曲率を許容すれば，M は有限連結である．

Huber の定理の証明は，有限連結でない M を境界が有限個の単純閉測地線で構成された有限連結な部分多様体の単調増大列 $\{M_j\}$ に分解し，各々の M_j に Cohn-Vossen の定理を適用して得られる．

$\{M_j\}$ の構成には定理 11.14 で主張する M 上の Morse exhaustion 関数を用

いる．証明の方針は以上である．

定理 11.14 (Morse exhaustion 関数の存在)　滑らかな n 次元多様体 M には Morse 関数 $f : M \to \mathbf{R}$ で $M^a(f) := \{x \in M \mid f(x) \leq a\}$ が任意の $a \in \mathbf{R}$ に対してコンパクトとなるものが存在する．

証明　I (proper なはめ込みの構成)　M の座標近傍系 $\{(U_j, \varphi_j)\}$ とその細分 $\{V_j\}$, $\{W_j\}$ および正値 exhaustion 関数 $f : M \to \mathbf{R}_+$ などの Appendix II で用意した記号を用いて目標とするはめ込み $\tau : M \to \mathbf{R}^m$ を構成し，τ を用いて Morse exhaustion 関数の存在を証明する．

まず，第 1 番目の座標近傍 (U_1, φ_1) に注目する．$m \geq 2n$ として，補題 16.8 を用いて，滑らかな写像 $\sigma_{-1} \circ \varphi_1^{-1} : B(O, 3) \to \mathbf{R}^m$ を多様体上の写像と考える．$\sigma_{-1} : U_1 \to \mathbf{R}^m$ を

$$\sigma_{-1}(p) := (0, \cdots, f(p))^t + A\varphi_1(p) \qquad (A \in \mathfrak{M}(m, n),\ p \in U_1)$$

とおけば，A の各成分を十分に小さく選んで σ_{-1} が U_1 の各点で正則となるようにできる．

次に滑らかな写像 $\sigma_0 : M \to \mathbf{R}^m$ を

$$\sigma_0(p) := \begin{cases} (0, \cdots, 0, f(p))^t + \alpha_1(p)A\varphi_1(p) & (p \in U_1), \\ (0, \cdots, 0, f(p))^t & (p \notin U_1) \end{cases}$$

と定義すると，$\sigma_0|_{W_1^b} = \sigma_{-1}|_{W_1^b}$ だから σ_0 は W_1^b の各点で正則となる．ここに，$\alpha_1 : U_1 \to [0, 1]$ は 1 の分解 16.1 節を構成するときに定義した関数である．定理 16.9 から関数 $\eta : M \to (0, 1)$ を 1 つ固定して，はめ込み $\tau : M \to \mathbf{R}^m$ が任意の点 $q \in M$ に対して $\|\tau(q) - \sigma_0(q)\| < \eta(q)$ を満たすように構成できた．すなわち，$\tau(M)$ は第 m 座標軸の正の部分から距離が 1 未満の近傍内にあって

$$\tau(M) \subset \left\{ v = (v_1, \cdots, v_m)^t \in \mathbf{R}^m \,\middle|\, \sum_{i=1}^{m-1} v_i^2 < 1,\ v_m > 0 \right\}$$

が成立する．

II (Gauss 写像)　$\tau(M)$ の単位法球面束 B_ν(normal unit sphere bundle over M) と各点 $p \in M$ における B_ν のファイバー $B_\nu(p)$ を以下で定義する：

$$B_\nu := \bigcup_{p \in M} B_\nu(p),$$
$$B_\nu(p) := \{(p, u) \mid u \text{ は} \tau(p) \text{ における } T_{\tau(p)}M \text{ の単位法線ベクトル}\}.$$

p のまわりの座標近傍 (U, φ) に制限すると $B_\nu|_U$ は $U \times \mathbf{S}^{m-n-1}$ と微分同相である．13.1 節で説明した $\mathbf{R}^3$ 内の曲面と同じ方法で Gauss 写像を定義する：

定義 11. 15 (部分多様体の Gauss 写像)　B_ν から $\mathbf{R}^m$ の原点を中心とする $(m-1)$ 次元単位球面 $\mathbf{S}_0^{m-1}$ への写像 $\nu : B_\nu \to \mathbf{S}_0^{m-1}$ を $\mathbf{R}^m$ における平行移動によって

$$\nu(p, u) := u \in \mathbf{S}_0^{m-1} \qquad ((p, u) \in B_\nu) \tag{11.2.1}$$

と定義して，ν を **Gauss 写像**と呼ぶ.

B_ν の点 (p, u) において $d\nu|_{(p,u)} \neq 0$ ならば，B_ν はこの点のまわりでは $\mathbf{R}^m$ 内の超曲面である．このとき，点 $(p, u) \in B_\nu$ における B_ν の単位法線ベクトルは u に他ならない．以下，局所的な議論では M の点と $\tau(M)$ の点を同一視して考える.

Sard の定理 16.5：(ii) より，ν の臨界点集合 $\mathrm{Crit}(\nu) := \left\{(p, u) \in B_\nu \;\middle|\; d\nu|_{(p,u)} = 0\right\}$ の ν による像は $\mathbf{S}_0^{m-1}$ 内の測度ゼロ集合である．従って $\mathbf{e} \in \mathbf{S}_0^{m-1} \backslash \nu(\mathrm{Crit}(\nu))$ を選ぶと，$\mathbf{e}$ の定める $\mathbf{R}^m$ 上の 1 次関数を $\tau(M)$ に制限して得られた関数：

$$h_{\mathbf{e}} : M \to \mathbf{R}, \qquad h_{\mathbf{e}}(p) := \langle \tau(p), \mathbf{e} \rangle \qquad (p \in M)$$

は Morse 関数である.

III (Morse exhaustion 関数の構成)　最後に Morse 関数 $h_{\mathbf{e}}$ が exhaustion であることを証明し，ただちに τ の proper 性が従うことを示す．ここに，連続写像 $f : X \to Y$ が任意のコンパクト集合 $K \subset Y$ に対して $f^{-1}(K)$ がコンパクトになるとき，f を**固有写像** (proper map) という (定義 10.6 を参照)．$\mathbf{S}_0^{m-1} \setminus \nu(\mathrm{Crit}(\nu))$ は $\mathbf{S}_0^{m-1}$ の稠密な開集合だから，$\varepsilon > 0$ を十分小さくとって $\mathbf{e} \notin \nu(\mathrm{Crit}(\nu))$ が $\langle \mathbf{e}, (0, \cdots, 0, 1)^t \rangle > 1 - \varepsilon^2$ を満たすように選べば，$h_{\mathbf{e}} : M \to \mathbf{R}_+$ は Morse exhaustion 関数である.

実際，任意の正数 c に対して $h_{\mathbf{e}}^{-1}(-\infty, c] \subset f^{-1}(-\infty, c+1]$ となって，

$$h_{\mathbf{e}}^{-1}(-\infty, c] \subset \bigcup_{i=1}^{[c]+2} W_i^b$$

だから $h_{\mathbf{e}}^{-1}(-\infty, c]$ はコンパクトである．任意のコンパクト集合 $K \subset \mathbf{R}^m$ に対して正数 a が存在して $h_{\mathbf{e}}(q) \leq a$ が任意の点 $q \in \tau^{-1}(K)$ に対して成り立つから，τ が proper である.　∎

Morse 関数はコンパクト多様体の位相の研究にはきわめて有力な手段である．Appendix III でその一端を紹介する．しかし，非コンパクト多様体の研究には Morse 関数は有効でないと考えられている．非コンパクト多様体上の Morse 関数は M の位相に関する情報を与えてくれない．実際，任意の非コンパクト多様体は臨界点を 1 つも持たない Morse 関数を許容することが知られている．

例 11.16　T^2 上の点 $p_0 \in T^2$ を除外した非コンパクト多様体上に臨界点を 1 つも持たない Morse 関数を構成しよう．

$$M := T^2 \setminus \{p_0\}$$

を $\mathbf{R}^3$ 内に proper に埋め込み，$\iota : M \to \mathbf{R}^3$ を用いて目標とする Morse 関数を構成する．$\mathbf{R}^3$ 内で xy-平面から 2 枚の円板 $(x \pm 5)^2 + y^2 \leq 1$ を除いた部分は $\iota(M)$ に完全に含まれるとせよ．更に $\iota(M)$ の残りの部分はチューブ $(S \times [0, \pi])$ であって，この部分は回転トーラスによって 2 つの円周 $(x \pm 5)^2 + y^2 = 1$ をつなげたものである．チューブ部分の正則表示は

$$x(u, v) := \begin{pmatrix} (5 + \cos u) \cos v \\ \sin u \\ (5 + \cos u) \sin v \end{pmatrix} \qquad (u, v) \in (-\pi, \pi) \times (0, v)$$

で与えられる．xy-平面とチューブの接合部分は「たたみ込み」を用いて滑らかに近似しておく．

M 上の滑らかな関数 f を以下のように定める．この際，f の等位集合の形が変化する 6 本の直線 $x = \pm 7, \pm 3, \pm 1$ の十分小さい近傍で f を滑らかな関数で近似して，目標の Morse 関数を得る．f の等位集合を以下のように定義する：

(1)　$p \in M$ がチューブ内にあるとき，$p = x(u, v)$ として

$$f(p) := \cos v.$$

(2)　$p \in M$ が xy-平面上にあるとき，$p = (x, y)$ として

(2-a)：$\{(x, y) \,|\, x \in (-\infty, -7] \cup [-1, 1] \cup [7, \infty)\}$ 上で f の等位集合は y 軸に平行な直線.

(2-b)：$\{(x, y) \,|\, x \in (-7, -3) \cup (3, 7)\}$ 上で f の等位集合は焦点を $(\pm 5, \pm y_0)$，$y_0 \geq 0$ とする楕円族で

$$\frac{(x + 5)^2}{(2 - b^{-1})^2} + \frac{y^2}{b^{-2}} = 1, \qquad b \geq 1.$$

(2-c)：$\{(x, y) \mid x \in (-3, -1) \cup (1, 3)\}$ 上で f の等位集合はグラフ曲線 $y = \tan^2 \dfrac{\pi}{2}(x \pm 2) + y_0$, $y_0 \in \mathbf{R}$ である.

x 軸上で f の値をみると，$x \leq -6$ で $f(x, 0)$ は単調増大，$f(-6, 0) = f(-4, 0) = -1$, $-4 \leq x \leq -2$ で $f(x, 0)$ は単調減少，$-2 \leq x \leq 2$ では単調増大, $2 \leq x \leq 4$ では単調減少, $f(4, 0) = f(6, 0) = 1$, $x \geq 6$ では単調増大である．更に $f(-2, y)$ は y に関し単調減少, $f(2, y)$ は単調増大である．$f(x, 0)$ は $x = -2$ で極小，$x = 2$ で極大となるが，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(-2, 0) < 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2, 0) > 0$ となる．x 軸の周りの f の等位集合と ∇f を矢印で記す [figure 11.2.1]：

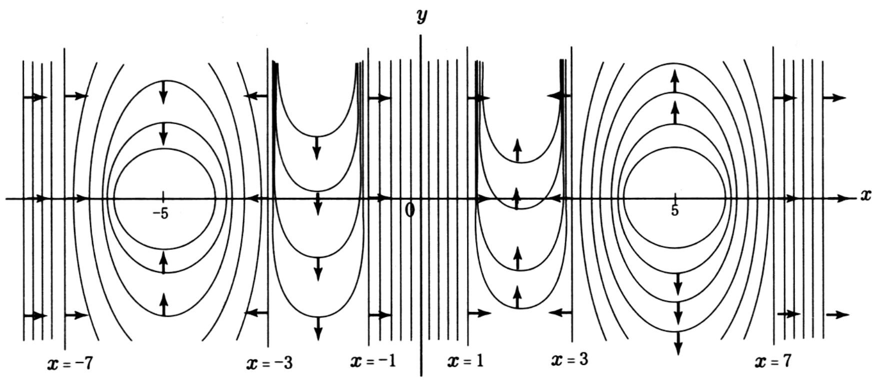


Figure 11.2.1

問 11. 17　種数 g のコンパクト 2 次元多様体から 1 点を除外した非コンパクト多様体 M 上の Morse 関数で臨界点を持たぬものを構成せよ．

問 11. 18　種数 g のコンパクト 2 次元多様体から k 個 $(1 < k < \infty)$ の点を除外した非コンパクト多様体 M 上の Morse 関数で臨界点を持たぬものを構成せよ．

問 11. 19　M を n 次元非コンパクト多様体とする．M 上の Morse 関数 $f : M \to \mathbf{R}$ で以下の性質を持つものを構成せよ：

(i)　f の最小値 0 をとる点は唯 1 つ存在する．

(ii)　各々の $k = 1, 2, \cdots$ に対して，点 $p_k \in M$ が唯 1 つ存在して，p_k は $f(p_k) = k$ を満たす f の臨界点である．

(iii)　f の臨界値集合は $\{0, 1, 2, \cdots\}$ である．

M は有限連結でない 2 次元連結完備 Riemann 多様体とする．$f : M \to \mathbf{R}$ を定理 11.14 で構成した Morse exhaustion 関数とし，$a \in \mathbf{R}$ を f の正則値とする．a-等位集合を $M_a^a(f) := f^{-1}(\{a\})$ とおけば，$M_a^a(f)$ は互いに交わらない有限個の単純閉曲線の和となる．これを

$$M_a^a(f) := \alpha_a^1[0, 1] \cup \cdots \cup \alpha_a^{n(a)}[0, 1]$$

と表す．一般に，$M \setminus M^a(f)$ は有界な連結成分と非有界な連結成分を持つ．

$W_a^1, \cdots, W_a^{\ell(a)}$ を $M \setminus M^a(f)$ の有界な連結成分とする．M は有限連結でないから，$M \setminus M^a(f)$ はチューブと異なる非有界連結成分を少なくとも 1 つは含む．$M \setminus M^a(f)$ に含まれるチューブ全体の集合を $U_a^1, \cdots, U_a^{m(a)}$ とする．このとき，M の部分多様体 $M_a \subset M$ を

$$M_a := M^a(f) \cup W_a^1 \cup \cdots \cup W_a^{\ell(a)} \cup U_a^1 \cup \cdots \cup U_a^{m(a)}$$

とおくと，M_a は $n(a) - \ell(a) - m(a)$ 個の円周と同相な境界を持ち，有限連結で，

$$n(a) > \ell(a) + m(a)$$

が成立する．

M が有限連結でないことの同値条件は，f の任意の正則値 a に対して

$$n(a) - \ell(a) - m(a) \geq 1$$

である．

特に，正則値の単調増大列 $\{a_j\}_{j=1,2,\cdots}$，$\lim_{j\to\infty} a_j = \infty$ をとって $M_j := M_{a_j}$ とおくと，以下の補題が成り立つように正則値の単調増大列 $\{a_j\}$ を選ぶことができる．実際，$f(\mathrm{Crit}(f))$ は高々可算集合である．

補題 11.20 (M の有限連結部分多様体の列による分解)　有限連結でない 2 次元完備 Riemann 多様体 M は部分多様体の列 $\{M_j\}$ で以下の性質を持つものを許容する．

(i)　$\{M_j\}$ は単調増大列で $\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j = M$.

(ii)　各 M_j は有限連結で，$k(j) := n(a_j) - \ell(a_j) - m(a_j)$ とおけば

$$\partial M_j = \alpha_j^1[0, 1] \cup \cdots \cup \alpha_j^{k(j)}[0, 1].$$

(iii)　$\chi(M_j) > \chi(M_{j+1}) \qquad (j = 1, 2, \cdots)$.

補題 11.21 有限連結でない 2 次元完備 Riemann 多様体の有限連結な部分多様体の列による分解を $\{M_j\}_{j=1,2,\cdots}$ とする．このとき，各 $j = 1, 2, \cdots$ に対して ∂M_j の各連結成分は長さを短縮するホモトピックな変形によって単純閉測地線でおきかえることができる．

証明 $M^{a_j}(f)$ の内点 $p_0 \in \mathrm{Int}(M^{a_j}(f))$ と ∂M_j の 1 つの連結成分 $\alpha_j^i[0, 1]$ を固定する．このとき，$M \setminus M_j$ のチューブでない連結成分 V_j^i $(i = 1, \cdots, k(j))$ で，その境界が $\alpha_j^i[0, 1]$ であるものが存在する．

V_j^i は端点を 2 個以上含むか，そうでなければ V_j^i はハンドルを含む．いずれの場合にも p_0 を基点とするループ $\beta_j^i : [0, 1] \to M_j \cup V_j^i$ で，α_j^i と自由にホモトピックな任意の閉曲線は β_j^i と交わるものが存在する．従って $\{\sigma_\mu\}_{\mu=1,2,\cdots}$ を α_j^i にホモトピックな曲線族の中で長さの下限を極限とする列とすると，

$$\sigma_\mu[0, 1] \subset B(\alpha_j^i[0, 1], L(\alpha_j^i) + L(\beta_j^i))^b \qquad (\mu = 1, 2, \cdots).$$

このコンパクト集合上の基本弧長をとって，長さを短縮するホモトピックな変形を各 σ_μ に施せば，その極限として単純閉曲線を得る [Figure 11.2.2]. ∎

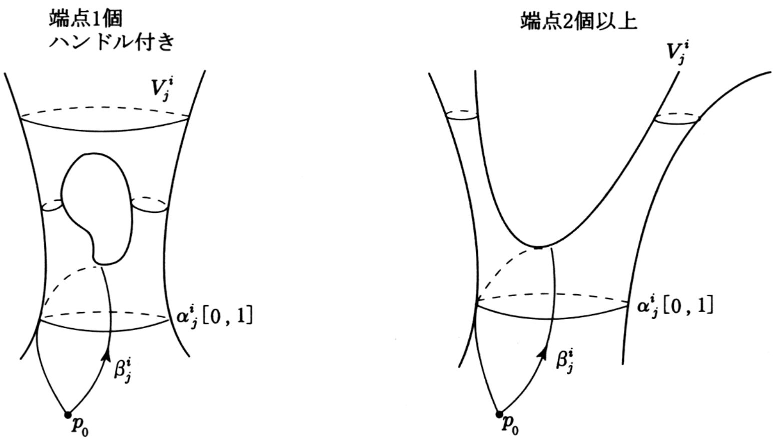


Figure 11.2.2 有限連結部分多様体の構成

Huber の定理の証明 上述の補題によって M を有限連結な部分多様体の列 $\{M_j\}$ によって分解し，更に ∂M_j は互いに交わらない有限個の単純閉測地線の和となる．各 M_j に Cohn-Vossen の定理を適用して $c(M_j) \leq 2\pi\chi(M_j)$ を得る．ところで，

$$\lim_{j\to\infty}\chi(M_j)=-\infty \quad だから \quad c(M)=\lim_{j\to\infty}c(M_j)=-\infty. \qquad \blacksquare$$

長さを短縮するホモトピー変形および全曲率に関連する問題をあげよう．

問 11.22　単連結でないコンパクト 2 次元完備 Riemann 多様体 M の点 p を基点とするループ空間を Ω_p とする．以下の命題を証明せよ：

(i)　$\alpha\in\Pi_1(M)$ を代表元とする Ω_p のホモトピー類の中で長さが最小となる測地ループ γ_p が存在する．

(ii)　対応 $p\to L(\gamma_p)$ は M 上の連続関数である．

(iii)　M がコンパクトのとき，$\alpha\neq 1,\alpha\in\Pi_1(M)$ のホモトピー類に属する閉測地線 γ で $L(\gamma)=\inf_{p\in M}L(\gamma_p)$ を満たすものが存在する．

問 11.23　問題 4.5 で与えた $\mathbf{R}^3$ 内の回転トーラスの普遍被覆空間は全曲率を許容しないことを示せ．

問 11.24　多様体 $M:=\mathbf{S}^1\times\mathbf{S}^1$ の Riemann 計量を g とする．もしも，M の普遍被覆空間 $\widetilde{M}$ が全曲率を許容すれば，g は平坦計量であることを示せ．

問 11.25　必ずしも向き付け可能でない，完備非コンパクトで有限連結な 2 次元 Riemann 多様体 M の全てのチューブが縮小チューブであるとせよ．もしも M が全曲率 $c(M)$ を許容すれば，$c(M)=2\pi\chi(M)$ が成り立つことを証明せよ．

問 11.26　必ずしも向き付け可能でない完備非コンパクトな 2 次元 Riemann 多様体 M の Gauss 曲率が至るところ非負のとき，以下を示せ：

(i)　M は有限連結で，M の端点は高々 2 個である．

(ii)　M の Euler 標数は高々 2 である．

(iii)　$\chi(M)=0$ のとき，M は平坦柱面または平坦な開 Möbius 帯のいずれかに等長的である．

(iv)　$\chi(M)=1$ のとき，M は $\mathbf{R}^2$ に微分同相である．

問 11.27　有限連結でない完備非コンパクトな $\mathbf{R}^3$ 内の曲面の例を 2 つあげよ．

第12章　極小曲面

前章では Gauss 曲率が一定の完備曲面の形を決定した．次に考える対象となる曲面は平均曲率が一定の完備曲面だろう．ここでは平均曲率が 0 の曲面 (極小曲面という) を解説し，次章では極小でない平均曲率が一定の曲面の形が決定できるかどうかを議論しよう．

3 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^3$ 内でコンパクトな極小曲面が存在しないことは定理 10.14 で証明した．完備な極小曲面の研究に関して，Bernstein の定理が最も重要な定理の 1 つである．更に，Bernstein の定理の拡張として，Pogorelov の定理，do Carmo-Peng, Fischer-Colbrie-Schoen の定理も解説しよう．

12.1　極小曲面と面積

第 4 章で 3 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^3$ 内の曲面の平均曲率 H が定義された．平均曲率 H が至るところ 0 となるような曲面を**極小曲面**と呼ぶ．次に極小曲面と曲面の面積の間の関係を調べよう．

$\mathbf{x} : D \to R^3$ を曲面の正則表示とし，U を D 内の (u^1, u^2) を座標とする平面内に曲線で囲まれた領域とする．U の境界をなす曲線を ∂U と書く．曲面片 $S = \{\mathbf{x}(u^1, u^2) \,|\, (u^1, u^2) \in U\}$ に対して，第 4 章で述べたように，その面積は

$$A(U) := \iint_U \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\, du^1 du^2 \tag{12.1.1}$$

で与えられる．パラメータ (u^1, u^2) が U を動くような曲面 $\tilde{\mathbf{x}} : U \to R^3$ (ただし，$\tilde{\mathbf{x}}(u^1, u^2) = \mathbf{x}(u^1, u^2)$ $((u^1, u^2) \in \partial U)$ とする) に対して，

$$A(U) \le \widetilde{A}(U) \tag{12.1.2}$$

を仮定する．つまり同じ境界を持つ任意の曲面 $\widetilde{S}$ に対して，S が面積最小であるとき，曲面 $S(U)$ はどのような性質を持っているか？

$\mathbf{e}$ を曲面 $S(U)$ の単位法線ベクトル場とし，$f(u^1, u^2)$ を境界 ∂U では 0 となるような U 上の関数とする．実数 $t > 0$ に対して，次のように定義された写像 $\widetilde{\mathbf{x}}_\varepsilon : U^b \times (-t, t) \mapsto \mathbf{R}^3$, $\varepsilon \in (-t, t)$ を関数 f による決定された $\mathbf{x}(U^b)$ の変分という．

$$\widetilde{\mathbf{x}}_\varepsilon(u^1, u^2) := \mathbf{x}(u^1, u^2) + \varepsilon f(u^1, u^2)\mathbf{e} \qquad ((u^1, u^2) \in U, \varepsilon \in (-t, t)) \tag{12.1.3}$$

十分小なる ε に対し，$\widetilde{\mathbf{x}}_\varepsilon : U \mapsto \mathbf{R}^3$ は曲面である．実際

$$\widetilde{\mathbf{x}}_1 = \frac{\partial \widetilde{\mathbf{x}}}{\partial u^1} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} + \varepsilon\left\{f\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial u^1} + \frac{\partial f}{\partial u^1}\mathbf{e}\right\},$$
$$\widetilde{\mathbf{x}}_2 = \frac{\partial \widetilde{\mathbf{x}}}{\partial u^2} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2} + \varepsilon\left\{f\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial u^2} + \frac{\partial f}{\partial u^2}\mathbf{e}\right\}$$

により，

$$\widetilde{g}_{11} = \langle \widetilde{\mathbf{x}}_1, \widetilde{\mathbf{x}}_1 \rangle = g_{11} - 2\varepsilon f h_{11} + \varepsilon^2\left\{f^2\left\langle \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial u^1}, \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial u^1}\right\rangle + \left(\frac{\partial f}{\partial u^1}\right)^2\right\}, \tag{12.1.4}$$

$$\widetilde{g}_{12} = \langle \widetilde{\mathbf{x}}_1, \widetilde{\mathbf{x}}_2 \rangle = g_{12} - 2\varepsilon f h_{12} + \varepsilon^2\left\{f^2\left\langle \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial u^1}, \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial u^2}\right\rangle + \frac{\partial f}{\partial u^1}\frac{\partial f}{\partial u^2}\right\}, \tag{12.1.5}$$

$$\widetilde{g}_{22} = \langle \widetilde{\mathbf{x}}_2, \widetilde{\mathbf{x}}_2 \rangle = g_{22} - 2\varepsilon f h_{22} + \varepsilon^2\left\{f^2\left\langle \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial u^2}, \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial u^2}\right\rangle + \left(\frac{\partial f}{\partial u^2}\right)^2\right\}. \tag{12.1.6}$$

ただし，h_{ij} は曲面 $S(U)$ の第 2 基本形式の成分である．

$\mathbf{x} : D \to \mathbf{R}^3$ が曲面であることにより，U^b において $g_{11}g_{22} - g_{12}^2$ の最小値は正である．

$$\begin{aligned}
&\widetilde{g}_{11}\widetilde{g}_{22} - \widetilde{g}_{12}^2 \\
&= (g_{11}g_{22} - g_{12}^2) - 2\varepsilon f\,(g_{11}h_{22} - 2g_{12}h_{12} + g_{22}h_{11}) \\
&\quad + \varepsilon^2 f^2\left\{4(h_{11}h_{22} - h_{12}^2) + g_{22}\left\langle \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial u^1}, \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial u^1}\right\rangle\right. \\
&\quad \left. + g_{11}\left\langle \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial u^2}, \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial u^2}\right\rangle - 2g_{12}\left\langle \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial u^1}, \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial u^2}\right\rangle\right\}
\end{aligned}$$

$$+\varepsilon^2\sum_{i,j=1}^{2} g^{ij}\frac{\partial f}{\partial u^i}\frac{\partial f}{\partial u^j}\left(g_{11}g_{22}-g_{12}^2\right)+\mathrm{o}[\varepsilon^2]$$

$$=(g_{11}g_{22}-g_{12}^2)\Bigg[1-4\varepsilon fH+4\varepsilon^2f^2K+\varepsilon^2|\nabla f|^2$$
$$+\frac{\varepsilon^2f^2}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}\left\{g_{22}\left\langle\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial u^1},\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial u^1}\right\rangle+g_{11}\left\langle\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial u^2},\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial u^2}\right\rangle\right.$$
$$\left.-2g_{12}\left\langle\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial u^1},\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial u^2}\right\rangle\right\}+\mathrm{o}[\varepsilon^2]\Bigg] \tag{12.1.7}$$

だから，十分小なる $\varepsilon>0$ に対して $\widetilde{\mathbf{x}}_\varepsilon : U^b \to \mathbf{R}^3$ は曲面の正則表示となる．

曲面の基本方程式 (5.1.7) により，

$$g_{22}\left\langle\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial u^1},\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial u^1}\right\rangle(g_{11}g_{22}-g_{12}^2)^2=\Big\{(g_{12}h_{12}-g_{22}h_{11})^2g_{11}g_{22}$$
$$+2(g_{12}h_{12}-g_{22}h_{11})(g_{12}h_{11}-g_{11}h_{12})g_{12}g_{22}+(g_{12}h_{11}-g_{11}h_{12})^2g_{22}^2\Big\},$$

$$g_{11}\left\langle\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial u^2},\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial u^2}\right\rangle(g_{11}g_{22}-g_{12}^2)^2=\Big\{(g_{12}h_{22}-g_{22}h_{12})^2g_{11}^2$$
$$+2(g_{12}h_{22}-g_{22}h_{12})(g_{12}h_{12}-g_{11}h_{22})g_{12}g_{11}+(g_{12}h_{12}-g_{11}h_{22})^2g_{22}^2\Big\},$$

$$2g_{12}\left\langle\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial u^1},\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial u^2}\right\rangle(g_{11}g_{22}-g_{12}^2)^2$$
$$=\Big\{2(g_{12}h_{12}-g_{22}h_{11})(g_{12}h_{22}-g_{22}h_{12})g_{11}g_{12}$$
$$+2(g_{12}h_{11}-g_{11}h_{12})(g_{12}h_{12}-g_{11}h_{22})g_{12}g_{22}$$
$$+2(g_{12}h_{12}-g_{22}h_{11})(g_{12}h_{12}-g_{11}h_{22})g_{12}^2$$
$$+(g_{12}h_{11}-g_{11}h_{12})(g_{12}h_{22}-g_{22}h_{12})g_{12}^2\Big\}$$

を得る．従って，

$$\left\{g_{22}\left\langle\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial u^1},\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial u^1}\right\rangle+g_{11}\left\langle\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial u^2},\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial u^2}\right\rangle-2g_{12}\left\langle\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial u^1},\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial u^2}\right\rangle\right\}(g_{11}g_{22}-g_{12}^2)^2$$
$$=(g_{11}g_{22}-g_{12}^2)\Big\{(g_{11}h_{22}-g_{22}h_{11})^2$$
$$+2(g_{12}h_{12}-g_{22}h_{11})(g_{12}h_{12}-g_{11}h_{22})$$
$$+2(g_{12}h_{11}-g_{11}h_{12})(g_{12}h_{22}-g_{22}h_{12})\Big\} \tag{12.1.8}$$

が成り立つ．

$$\begin{aligned}&(g_{11}h_{22}-g_{22}h_{11})^2+2(g_{12}h_{12}-g_{22}h_{11})(g_{12}h_{12}-g_{11}h_{22})\\&+2(g_{12}h_{11}-g_{11}h_{12})(g_{12}h_{22}-g_{22}h_{12})\\&=(g_{11}g_{22}-g_{12}^2)^2(4H^2-2K)\end{aligned}\tag{12.1.9}$$

が成立するから，(12.1.7)，(12.1.8)，(12.1.9) により

$$\begin{aligned}&\widetilde{g}_{11}\widetilde{g}_{22}-\widetilde{g}_{12}^2\\&=(g_{11}g_{22}-g_{12}^2)\Big[1-4\varepsilon fH+\varepsilon^2\left\{f^2(2K+4H^2)+|\nabla f|^2\right\}+\mathrm{o}[\varepsilon^2]\Big].\end{aligned}\tag{12.1.10}$$

$A(\varepsilon)$ を曲面 $S_\varepsilon(U)$ の面積とすると，$A(0)=A(U)$ が成り立つ．従って，

$$\left|A(\varepsilon)-A(0)+\varepsilon\iint_U 2fH\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}\,du^1du^2\right|\leq M_1\varepsilon^2$$

が得られた．ただし，M_1 はある定数である．故に，$A(\varepsilon)$ を ε の関数とみなすとき，第 1 変分公式

$$\frac{dA(0)}{d\varepsilon}=-2\iint_U fHdS\tag{12.1.11}$$

が成り立つ．ここで，$dS=\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}\,du^1du^2$ は $S(U)$ の面積要素である．

曲面 $S(U)$ が面積最小であるためには，$|\varepsilon|$ が十分小さいとき，$A(0)\leq A(\varepsilon)$ が成り立たなければならない．よって $\dfrac{dA(0)}{d\varepsilon}=0$，すなわち，

$$\iint_U fHdS=0$$

が成り立つ．

関数 f の任意性により，平均曲率 H は 0 となることを示そう．

実際，もしもある点 $(u_0^1,u_0^2)\in U$ で $H(u_0^1,u_0^2)\neq 0$ を満たすならば，平均曲率 H は U 上の連続関数だから，点 $(u_0^1,u_0^2)\in U$ のある近傍 V が存在して，そこでは $H\neq 0$ が成り立つ．従って，V 上で $H>0$ を仮定してもよい．関数 f を次のように選ぶ．

(i)　$f(u_0^1,u_0^2)>0$.

(ii)　$f(u^1,u^2)\geq 0\quad (u^1,u^2)\in U$.

(iii)　$f(u^1,u^2)=0\quad (u^1,u^2)\notin V$.

このとき，

$$\iint_U fHdS>0$$

が成り立つ．これは矛盾だから，$H \equiv 0$ である．つまり面積最小となる曲面は極小曲面である．

次に極小曲面の第 2 変分公式を考える．平均曲率 $H = 0$ だから，(12.1.10) により，

$$\widetilde{g}_{11}\widetilde{g}_{22} - \widetilde{g}_{12}^2 = (g_{11}g_{22} - g_{12}^2)\{1 + \varepsilon^2(2Kf^2 + |\nabla f|^2) + \mathrm{o}[\varepsilon^2]\} \qquad (12.1.12)$$

が成り立つ．Taylor 展開により，次の第 2 変分公式が得られた．

命題 12.1 (第 2 変分公式)　極小曲面 $\mathbf{x} : D \to \mathbf{R}^3$ に対して，

$$A''(0) = \iint_D (2Kf^2 + |\nabla f|^2)dS \qquad (12.1.13)$$

が成り立つ．

定義 12.2　全ての関数 f に対して，$A''(0) > 0$ となるとき，D は**安定**であるという．ある関数 f に対して，$A''(0) < 0$ となるとき，D は**不安定**であるという．

12.2　グラフ曲面

第 3 章で述べたように，曲面は局所的に次のように表すことができる．

$$\mathbf{x} : U \to \mathbf{R}^3, \qquad \mathbf{x}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \qquad ((x_1, x_2) \in U).$$

上の式で定義された曲面はグラフ曲面と呼ばれる．この節で曲面の局所的な性質を考えるので，取り扱う曲面はグラフ曲面と仮定してもよい．

グラフ曲面に関して例 3.2 で計算した結果から次の命題が成立する．

命題 12.3　グラフ曲面

$$\mathbf{x} : U \to \mathbf{R}^3, \qquad \mathbf{x}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \qquad ((x_1, x_2) \in U)$$

は次の 2 次微分方程式を満たす．

$$\left\{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\right\}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} - 2\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \left\{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\right\}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$$
$$= 2H\left\{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}. \qquad (12.2.1)$$

系 12.4　グラフ極小曲面

$$\mathbf{x} : U \to \mathbf{R}^3, \qquad \mathbf{x}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \qquad ((x_1, x_2) \in U)$$

は次の 2 次微分方程式を満たす.

$$\left\{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\right\} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \left\{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\right\} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 0. \tag{12.2.2}$$

証明　この曲面はグラフ極小曲面だから, 平均曲率 $H = 0$ が成り立つ. 命題 12.3 により, この系は明らかである. ∎

注意 12.5　微分方程式 (12.2.2) は**極小曲面の微分方程式**と呼ばれる.

次に, 極小曲面の微分方程式 (12.2.2) を満たすグラフ極小曲面の例を与えよう.

例 12.6　関数 $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 + c\,((x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2)$ は極小曲面の微分方程式 (12.2.2) を満たす. ただし a, b, c は定数である. 従って,

$$\mathbf{x} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3, \qquad \mathbf{x}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \qquad ((x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2)$$

はグラフ極小曲面である. このグラフ極小曲面は平面である.

例 12.7　関数

$$f(x_1, x_2) = \tan^{-1} \frac{x_2}{x_1} \qquad ((x_1, x_2) \in U = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$$

は極小曲面の微分方程式 (12.2.2) を満たす. 従って,

$$\mathbf{x} : U \to \mathbf{R}^3, \qquad \mathbf{x}(x_1, x_2) = \left(x_1, x_2, \tan^{-1} \frac{x_2}{x_1}\right) \qquad ((x_1, x_2) \in U = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$$

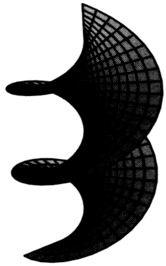


Figure 12.2.1　常螺旋面

はグラフ極小曲面である．このグラフ極小曲面を**常螺旋面**と呼ぶ [Figure 12.2.1].

例 12.8 関数

$$f(x_1,\, x_2) = \cosh^{-1}\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$
$$\left((x_1,\, x_2) \in U = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x_1,\, x_2) \,|\, x_1^2 + x_2^2 \geq 1\}\right)$$

は極小曲面の微分方程式 (12.2.2) を満たす．従って，

$$\mathbf{x} : U \to \mathbf{R}^3, \qquad \mathbf{x}(x_1,\, x_2) = \left(x_1,\, x_2,\, \cosh^{-1}\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)$$
$$\left((x_1,\, x_2) \in U = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x_1,\, x_2) \,|\, x_1^2 + x_2^2 \geq 1\}\right)$$

はグラフ極小曲面である．このグラフ極小曲面を**懸垂面**と呼ぶ [Figure 12.2.2].

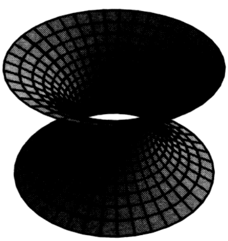


Figure 12.2.2　懸垂面

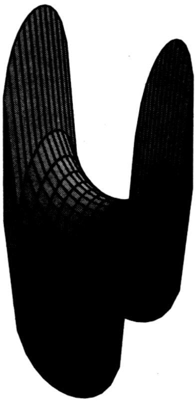


Figure 12.2.3　Scherk の曲面

例 12.9 関数

$$f(x_1,\, x_2) = \log\frac{\cos x_2}{\cos x_1} \qquad ((x_1,\, x_2) \in U)$$

は極小曲面の微分方程式 (12.2.2) を満たす．従って，

$$\mathbf{x} : U \to \mathbf{R}^3, \qquad \mathbf{x}(x_1,\, x_2) = \left(x_1,\, x_2, \log\frac{\cos x_2}{\cos x_1}\right) \qquad ((x_1, x_2) \in U)$$

はグラフ極小曲面である．このグラフ極小曲面は **Scherk の曲面**と呼ばれる [Figure 12.2.3].

問 12.10 上の例 12.9 の関数 f の定義域 U を求めよ．

簡単のため，以下

$$p = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \qquad q = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \qquad W = \left\{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

とおく．

補題 12.11　グラフ極小曲面

$$\mathbf{x} : U \to \mathbf{R}^3, \qquad \mathbf{x}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \qquad ((x_1, x_2) \in U)$$

に対して，

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1+q^2}{W}\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{pq}{W}\right), \tag{12.2.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1+p^2}{W}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{pq}{W}\right) \tag{12.2.4}$$

が成り立つ．

証明　命題 12.3 により，平均曲率 H は

$$H = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{p}{W}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{q}{W}\right)\right\} \tag{12.2.5}$$

を満たす．実際に，

$$\begin{aligned}
2W^2H &= \frac{1+q^2}{W}\frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{1+p^2}{W}\frac{\partial q}{\partial x_2} - \frac{pq}{W}\frac{\partial q}{\partial x_1} - \frac{pq}{W}\frac{\partial p}{\partial x_2} \\
&= \frac{W^2-p^2}{W}\frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{W^2-q^2}{W}\frac{\partial q}{\partial x_2} - \frac{pq}{W}\frac{\partial q}{\partial x_1} - \frac{pq}{W}\frac{\partial p}{\partial x_2} \\
&= \left\{W\frac{\partial p}{\partial x_1} - \frac{p}{W}\left(p\frac{\partial p}{\partial x_1} + q\frac{\partial q}{\partial x_1}\right)\right\} \\
&\quad + \left\{W\frac{\partial q}{\partial x_2} - \frac{q}{W}\left(p\frac{\partial p}{\partial x_2} + q\frac{\partial q}{\partial x_2}\right)\right\} \\
&= W^2\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{p}{W}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{q}{W}\right)\right\}
\end{aligned}$$

である．

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1+q^2}{W}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{pq}{W}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{W^2-p^2}{W}\right) - p\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{q}{W}\right) - \frac{q}{W}\frac{\partial p}{\partial x_2} \\
&= \frac{\partial W}{\partial x_1} - \frac{p}{W}\frac{\partial p}{\partial x_1} - 2Hp - \frac{q}{W}\frac{\partial q}{\partial x_1} \qquad \text{((12.2.5) より)}
\end{aligned}$$

$$= -2Hp = 0.$$

よって,

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\frac{1+q^2}{W}\Big) = \frac{\partial}{\partial x_2}\Big(\frac{pq}{W}\Big)$$

である．同様にして,

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\Big(\frac{1+p^2}{W}\Big) = \frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\frac{pq}{W}\Big)$$

も成り立つ． ∎

命題 12. 12 グラフ極小曲面

$$\mathbf{x} : U \to \mathbf{R}^3, \qquad \mathbf{x}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \qquad ((x_1, x_2) \in U)$$

の Gauss 曲率 K は

$$K = \frac{W}{2}\Delta\Big(\frac{1}{W}\Big)$$

を満たす．ただし, Δ はグラフ極小曲面の Laplace 作用素である (cf. 注意 12.18).

証明

$$\partial_i\Big(\frac{1}{W}\Big) = -\frac{p\partial_i p + q\partial_i q}{W^3}$$

および極小曲面の方程式 (12.2.2) により,

$$\frac{1+q^2}{W}\partial_1\frac{1}{W} - \frac{pq}{W}\partial_2\frac{1}{W} = \frac{p\partial_2 q - q\partial_1 q}{W^2}, \tag{12.2.6}$$

$$-\frac{pq}{W}\partial_1\frac{1}{W} + \frac{1+p^2}{W}\partial_2\frac{1}{W} = \frac{q\partial_1 p - p\partial_1 q}{W^2} \tag{12.2.7}$$

が成り立つ．これにより,

$$\begin{aligned}
\frac{W}{2}\Delta\frac{1}{W} &= \frac{1}{2}\partial_i\Big(g^{ij}W\partial_j\frac{1}{W}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big\{\partial_1\Big(\frac{1+q^2}{W}\partial_1\frac{1}{W}\Big) - \partial_1\Big(\frac{pq}{W}\partial_2\frac{1}{W}\Big) \\
&\qquad - \partial_2\Big(\frac{pq}{W}\partial_1\frac{1}{W}\Big) + \partial_2\Big(\frac{1+p^2}{W}\partial_2\frac{1}{W}\Big)\Big\} \\
&= \frac{1}{2}\Big\{\partial_1\Big(\frac{p\partial_2 q - q\partial_1 q}{W^2}\Big) + \partial_2\Big(\frac{q\partial_1 p - p\partial_1 q}{W^2}\Big)\Big\}
\end{aligned}$$

が成り立つ．

$$\partial_1\Big(\frac{p\partial_2 q - q\partial_1 q}{W^2}\Big) = \frac{\partial_1 p\partial_2 q - \partial_2 p\partial_1 q}{W^2}$$

$$+\frac{(p\partial_1\partial_2 q - q\partial_2\partial_1 p)W^2 - 2(p\partial_2 q - q\partial_1 q)(p\partial_1 p + q\partial_1 q)}{W^4}$$

と

$$\partial_2\Big(\frac{q\partial_1 p - p\partial_1 q}{W^2}\Big) = \frac{\partial_1 p\partial_2 q - \partial_2 p\partial_1 q}{W^2}$$
$$+\frac{(-p\partial_1\partial_2 q + q\partial_2\partial_1 p)W^2 - 2(q\partial_1 p - p\partial_1 q)(p\partial_2 p + q\partial_2 q)}{W^4}$$

により，

$$\frac{W}{2}\Delta\Big(\frac{1}{W}\Big) = \frac{\partial_1 p\partial_2 q - \partial_2 p\partial_1 q}{W^2} - \frac{(p^2+q^2)(\partial_1 p\partial_2 q - \partial_2 p\partial_1 q)}{W^4}$$

を得る．

$$K = \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})} = \frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - \Big(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\Big)^2}{W^4}$$
$$= \frac{\partial_1 p\partial_2 q - \partial_2 p\partial_1 q}{W^4}$$

だから，

$$K = \frac{W}{2}\Delta\Big(\frac{1}{W}\Big)$$

が成立する．　∎

命題 12.13　グラフ極小曲面

$$\mathbf{x} : U \to \mathbf{R}^3, \qquad \mathbf{x}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \qquad ((x_1, x_2) \in U)$$

は Riemann 計量 $g* = \Big(\dfrac{1+W}{W}\Big)^2 g$ に対して平坦曲面となる．つまり曲面 $(\mathbf{x}(U), g*)$ の Gauss 曲率は 0 である．

証明　次の補題により，$g* = \Big(\dfrac{1+W}{W}\Big)^2 g$ は平坦計量であることがわかる．

補題 12.14　グラフ極小曲面

$$\mathbf{x} : U \to \mathbf{R}^3, \qquad \mathbf{x}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \qquad ((x_1, x_2) \in U)$$

の各点で適当に小さい近傍をとれば，そこでは等温座標系が存在する．すなわち，このグラフ極小曲面の第 1 基本形式は次のように表せる．

$$ds^2 = \frac{W^2}{(1+W)^2}((du^1)^2 + (du^2)^2).$$

ここで，(u^1, u^2) が等温座標である．

証明　補題 12.11 により，U 上で，

$$\frac{\partial A}{\partial x_1}=\frac{1+p^2}{W},\qquad \frac{\partial A}{\partial x_2}=\frac{pq}{W},$$
$$\frac{\partial B}{\partial x_1}=\frac{pq}{W},\qquad \frac{\partial B}{\partial x_2}=\frac{1+q^2}{W}$$

を満たす関数 $A(x_1, x_2)$, $B(x_1, x_2)$ が存在する．このとき座標変換

$$u^1=x_1+A(x_1,x_2),\qquad u^2=x_2+B(x_1,x_2) \tag{12.2.8}$$

により，

$$\frac{\partial u^1}{\partial x_1}=1+\frac{1+p^2}{W},\qquad \frac{\partial u^1}{\partial x_2}=\frac{pq}{W},$$
$$\frac{\partial u^2}{\partial x_1}=\frac{pq}{W},\qquad \frac{\partial u^2}{\partial x_2}=1+\frac{1+q^2}{W}$$

が成り立つ．座標変換 (12.2.8) の Jacobi 行列式 J は

$$J=\frac{\partial(u^1,u^2)}{\partial(x_1,x_2)}=2+\frac{2+p^2+q^2}{W}>0$$

で与えられる．従って，逆関数定理により，適当に小さい近傍で

$$x_1=x_1(u^1,\,u^2),\qquad x_2=x_2(u^1,\,u^2)$$

が存在する．直接に計算して，次の式を得る．

$$\begin{cases}\dfrac{\partial x_1}{\partial u^1}=\dfrac{W+1+q^2}{JW}, & \dfrac{\partial x_2}{\partial u^1}=-\dfrac{pq}{JW},\\[2mm] \dfrac{\partial x_1}{\partial u^2}=-\dfrac{pq}{JW}, & \dfrac{\partial x_2}{\partial u^2}=\dfrac{W+1+p^2}{JW},\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial u^1}=\dfrac{p(W+1)}{JW}, & \dfrac{\partial f}{\partial u^2}=\dfrac{q(W+1)}{JW}.\end{cases} \tag{12.2.9}$$

故に，新しい座標 (u^1, u^2) に関して

$$g_{11}=\left\langle\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1},\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1}\right\rangle=\frac{W^2}{(1+W)^2}, \tag{12.2.10}$$

$$g_{12}=g_{21}=\left\langle\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1},\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2}\right\rangle=0, \tag{12.2.11}$$

$$g_{22}=\left\langle\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2},\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2}\right\rangle=\frac{W^2}{(1+W)^2} \tag{12.2.12}$$

だから，グラフ極小曲面の第 1 基本形式は

$$ds^2 = \frac{W^2}{(1+W)^2}((du^1)^2 + (du^2)^2)$$

となる. ∎

問 12.15　式 (12.2.9), (12.2.10), (12.2.11), (12.2.12) を示せ.

補題 12.16　等温座標系 (u^1, u^2) をパラメータとする曲面

$$\mathbf{x} : U \to \mathbf{R}^3,$$
$$\mathbf{x}(u^1, u^2) = (x_1(u^1, u^2), x_2(u^1, u^2), x_3(u^1, u^2)) \qquad ((u^1, u^2) \in U)$$

は

$$\mathbf{x}_{11} + \mathbf{x}_{22} = 2g_{11}H\mathbf{e}$$

を満たす. ただし $\mathbf{x}_{ij} = \dfrac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^i \partial u^j}$ である.

証明　$\mathbf{x}_i = \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i}$ とおく. (u^1, u^2) は等温座標系だから, $g_{11} = g_{22}$, $g_{12} = 0$ が成り立つ. つまり

$$\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle = \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 \rangle, \qquad \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle = 0$$

である. 最初の式を u^1 で, 2 番目の式を u^2 で微分して

$$\langle \mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_1 \rangle = \langle \mathbf{x}_{12}, \mathbf{x}_2 \rangle = -\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_{22} \rangle.$$

従って,

$$\langle \mathbf{x}_{11} + \mathbf{x}_{22}, \mathbf{x}_1 \rangle = 0$$

を得る. 同様にして

$$\langle \mathbf{x}_{11} + \mathbf{x}_{22}, \mathbf{x}_2 \rangle = 0$$

を得る. すなわち, $\mathbf{x}_{11} + \mathbf{x}_{22}$ は $\mathbf{e}$ に平行である. 曲面の基本方程式 (定理 5.1) から

$$\langle \mathbf{x}_{11} + \mathbf{x}_{22}, \mathbf{e} \rangle = h_{11} + h_{22}$$

だから, 平均曲率の公式 (4.3.1) により,

$$\mathbf{x}_{11} + \mathbf{x}_{22} = 2g_{11}H\mathbf{e}$$

である. ∎

定理 12.17　グラフ曲面

$$\mathbf{x} : U \to \mathbf{R}^3, \qquad \mathbf{x}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \qquad ((x_1, x_2) \in U)$$

が極小曲面であるための必要十分条件は，各成分 $x_1, x_2, x_3 = f(x_1, x_2)$ があるパラメータ (u^1, u^2) に関して調和関数となることである．

注意 12.18　M を多様体とする．M 上で定義された関数 f が

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial\left(\sqrt{\det(g_{k\ell})}\, g^{ij} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j} = 0$$

を満たすとき，f を M 上の**調和関数**という．ただし，Δ は M 上の Laplace 微分作用素である．M 上至るところで $\Delta f \leq 0 \, (\geq 0)$ を満たすとき，f を M 上の**優 (劣) 調和関数**という．多様体 M 上で上 (下) に有界な劣 (優) 調和関数は定数となるとき，M は**放物的**であると呼ぶ．

証明　補題 12.14 により，グラフ曲面

$$\mathbf{x} : U \to \mathbf{R}^3, \qquad \mathbf{x}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \qquad ((x_1, x_2) \in U)$$

が極小曲面ならば, 等温座標系 (u^1, u^2) が存在する (実際，どの曲面上にも等温座標系が存在する)．(u^1, u^2) に関して, 補題 12.16 により, $\Delta \mathbf{x} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3) = (0, 0, 0)$ だから $x_1, x_2, x_3 = f(x_1, x_2)$ が調和関数となる．逆に $x_1, x_2, x_3 = f(x_1, x_2)$ があるパラメータ (u^1, u^2) に関して調和関数ならば，補題 12.16 により，$H = 0$．すなわち，グラフ曲面

$$\mathbf{x} : U \to \mathbf{R}^3, \qquad \mathbf{x}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \qquad ((x_1, x_2) \in U)$$

が極小曲面である．■

12.3　Bernstein の定理

この節で，極小曲面の大域的な性質を考える．まず，次の定理を示す．

定理 12.19　境界のないコンパクトな極小曲面は存在しない．

証明　定理 10.14 より，境界のないコンパクトな曲面上には Gauss 曲率が正となる点が存在する．もしも境界のないコンパクトな極小曲面が存在するならば，極小曲面の Gauss 曲率が非正だから，これは矛盾である．■

注意 12.20　調和関数の性質を使って，定理 12.19 の別証明を与えよう．もしも境界のないコンパクトな極小曲面が存在するならば，それを S とし，点 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ を x_3 が最大値になる点とする．$\mathbf{x}$ のある近傍で等温座標 (u^1, u^2) が存在して，(u^1, u^2) に関して $x_1(u^1, u^2)$, $x_2(u^1, u^2)$, $x_3(u^1, u^2)$ は調和関数である．$x_3 = x_3(u^1, u^2)$ に最大値原理を適用して $x_3(u^1, u^2)$ は定数になる．調和関数は整級数に展開できるので，空でない開集合の上で定数になる調和関数は恒等的に定数である．よって，x_3 が定数である．同様にして，x_1, x_2 はともに定数である．これは矛盾である．

定理 12.19 によって境界のないコンパクトな極小曲面が存在しないので，完備，非コンパクトな極小曲面について考察するのは当然である．完備，非コンパクトな極小曲面に関する重要な定理の 1 つは次の Bernstein の定理である．

定理 12.21 (Bernstein の定理)　グラフ極小曲面

$$\mathbf{x} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3, \qquad \mathbf{x}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \qquad ((x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2)$$

は平面である．つまり，x_1x_2-平面の全体で定義された関数 $f(x_1, x_2)$ が極小曲面の微分方程式 (12.2.2) の解であるための必要十分条件は，$f(x_1, x_2)$ が x_1, x_2 の線形関数であることである．

この Bernstein の定理を証明するために，まず幾つかの補題を用意する．

補題 12.22　$T(x_1, x_2)$ を円板 $U = \{(x_1, x_2) \,|\, x_1^2 + x_2^2 < R^2\}$ 上で定義された C^2-級関数とし，その Hesse 行列

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

が正定値であると仮定する．

$$u^1 = x_1 + \frac{\partial T}{\partial x_1}, \qquad u^2 = x_2 + \frac{\partial T}{\partial x_2}$$

で定義された写像 $(x_1, x_2) \to (u^1, u^2)$ は中心 $(u^1(0), u^2(0))$，半径 R となる円板を含むある領域 D 上の微分同相である．

証明　T が C^2-級関数で，$u^1 = x_1 + \dfrac{\partial T}{\partial x_1}$, $u^2 = x_2 + \dfrac{\partial T}{\partial x_2}$ により写像 $(x_1, x_2) \to (u^1, u^2)$ は C^1-級である．x, y を U 内の異なる 2 点とし，η, ξ をそれぞれ x, y の像とする．このとき，

$$\langle \eta - \xi, \eta - \xi \rangle > \langle x - y, x - y \rangle \tag{12.3.1}$$

が成り立つ．実際に，関数 $\phi(t) = T(tx + (1-t)y)\ (0 \le t \le 1)$ とおくと，

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{2} \left\{ \frac{\partial T}{\partial x_i}(tx + (1-t)y) \right\} (x_i - y_i).$$

Hesse 行列

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

が正定値であるという仮定によって，任意の $t \in [0, 1]$ に対して

$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} = \sum_{i,j=1}^{2} \left\{ \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j}(tx + (1-t)y) \right\} (x_i - y_i)(x_j - y_j) > 0$$

が成り立つ．よって $\dfrac{d\phi(1)}{dt} > \dfrac{d\phi(0)}{dt}$ を得る．すなわち，

$$\sum_i \frac{\partial T(x)}{\partial x_i}(x_i - y_i) > \sum_i \frac{\partial T(y)}{\partial x_i}(x_i - y_i)$$

である．

$$\eta - \xi = x - y + (u - v)$$

と

$$u = \left(\frac{\partial T(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial T(x)}{\partial x_2} \right), \qquad v = \left(\frac{\partial T(y)}{\partial x_1}, \frac{\partial T(y)}{\partial x_2} \right)$$

により

$$\langle \eta - \xi, x - y \rangle > \langle x - y, x - y \rangle$$

が成り立つ．Schwarz の不等式により

$$\langle \eta - \xi, x - y \rangle^2 \le \langle \eta - \xi, \eta - \xi \rangle \langle x - y, x - y \rangle$$

だから，上の不等式より

$$\langle \eta - \xi, \eta - \xi \rangle > \langle x - y, x - y \rangle$$

が成り立つ．U 内の微分可能な曲線 $x(t)$ に対して $\eta(t)$ は $x(t)$ の像だから，(12.3.1) および平均値定理により $\left\| \dfrac{d\eta(t)}{dt} \right\| \ge \left\| \dfrac{dx(t)}{dt} \right\|$ が成り立つ．従って

$$\frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(x_1, x_2)} \ge 1$$

が成り立つ．故に写像 $(x_1, x_2) \to (u^1, u^2)$ は局所的に微分同相である．(12.3.1)

により，この写像は単射だから，この写像はある領域 D 上で微分同相である．

次に領域 D が中心 $(u^1(0), u^2(0))$，半径 R の円板を含むことを示す．もしも D が全平面ならば，明らかである．

そうでない場合，D の補集合の点 η が存在して，$\eta_0 := (u^1(0), u^2(0))$ への距離が最小値となる．$\{\eta_n\}$ を D 内の η に収束する点列とし，x_n を η_n に対応する点とすると，写像 $(x_1, x_2) \to (u^1, u^2)$ は微分同相だから，U 内で点列 $\{x_n\}$ の収束点が存在しない．よって $|x_n| \to R$．(12.3.1) により，

$$\|\eta_k - \eta_0\| > \|x_k\|$$

つまり

$$\|\eta - \eta_0\| \geq \lim \|x_k\| = R$$

が成り立つ．故に，領域 D は中心 $(u^1(0), u^2(0))$，半径 R の円板を含むことが分かる． ∎

命題 12.23

$$\mathbf{x} : U \to \mathbf{R}^3, \qquad \mathbf{x}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \qquad ((x_1, x_2) \in U)$$

をグラフ極小曲面とする．ただし，$U = \{(x_1, x_2) \,|\, x_1^2 + x_2^2 < R^2\}$ とする．(12.2.8) により定義された写像 $(x_1, x_2) \to (u^1, u^2)$ は半径 R となる円板を含む領域 D 上の微分同相である．

証明

$$\mathbf{x} : U \to \mathbf{R}^3, \qquad \mathbf{x}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \qquad ((x_1, x_2) \in U)$$

は $U = \{(x_1, x_2) \,|\, x_1^2 + x_2^2 < R^2\}$ で定義されたグラフ極小曲面だから，補題 12.14 の証明により，

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = A, \qquad \frac{\partial T}{\partial x_2} = B$$

を満たす C^2-級関数 $T(x_1, x_2)$ が存在する．

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} = \frac{1+p^2}{W} > 0, \qquad \det\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \frac{\partial(A, B)}{\partial(x_1, x_2)} = 1$$

が成り立つから，関数 T の Hesse 行列は正定値である．こうして補題 12.22 により，この命題が成り立つ． ∎

定理 12.21 の証明　(12.2.8) により定義された写像の定義域は x_1x_2-平面の

全体である．命題 12.23 によって，この写像は x_1x_2-平面から u^1u^2-平面への微分同相である．補題 12.14 により，(u^1, u^2) は等温座標系である．従って，複素数関数

$$\begin{cases} \phi(z) = \dfrac{\partial f}{\partial u^1} - i\dfrac{\partial f}{\partial u^2}, \\ \phi_1(z) = \dfrac{\partial x_1}{\partial u^1} - i\dfrac{\partial x_1}{\partial u^2}, \\ \phi_2(z) = \dfrac{\partial x_2}{\partial u^1} - i\dfrac{\partial x_2}{\partial u^2} \end{cases}$$

は $z = u^1 + iu^2$ の正則関数である．実際に，

$$\frac{\partial \phi}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 f}{(\partial u^1)^2} + \frac{\partial^2 f}{(\partial u^2)^2}\Big),$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 x_1}{(\partial u^1)^2} + \frac{\partial^2 x_1}{(\partial u^2)^2}\Big),$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 x_2}{(\partial u^1)^2} + \frac{\partial^2 x_2}{(\partial u^2)^2}\Big)$$

を得るから，補題 12.16 により，

$$\frac{\partial \phi}{\partial \overline{z}} = 0, \qquad \frac{\partial \phi_1}{\partial \overline{z}} = 0, \qquad \frac{\partial \phi_2}{\partial \overline{z}} = 0.$$

従って，$\phi(z), \phi_1(z), \phi_2(z)$ は z の正則関数である．ϕ_1, ϕ_2 の積 $\phi_1\phi_2$ の虚部は

$$\mathfrak{Im}(\overline{\phi}_1\phi_2) = -\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u^1, u^2)} < 0$$

だから，各点 z に対して $\phi_1 \neq 0, \phi_2 \neq 0$ が成り立つ．更に

$$\mathfrak{Im}\Big(\frac{\phi_2}{\phi_1}\Big) = \frac{1}{|\phi_1|^2}\,\mathfrak{Im}(\overline{\phi}_1\phi_2) < 0$$

が成立する．故に，$\phi_1(z), \phi_2(z)$ は z の正則関数だから，関数 $\dfrac{\phi_2}{\phi_1}$ は z-平面上の正則関数である．$\dfrac{\phi_2}{\phi_1}$ の虚部は負だから，それは定数でなければならない．よって，

$$\phi_2 = c\phi_1 \qquad (c = a - ib,\ b > 0)$$

である．ϕ_1, ϕ_2 の定義により，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_2}{\partial u^1} = a\dfrac{\partial x_1}{\partial u^1} - b\dfrac{\partial x_1}{\partial u^2}, \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial u^2} = b\dfrac{\partial x_1}{\partial u^1} + a\dfrac{\partial x_1}{\partial u^2} \end{cases}$$

だから，$x_1 = y_1$, $x_2 = ay_1 + by_2$ とおくと，

$$\frac{\partial y_1}{\partial u^1} = \frac{\partial y_2}{\partial u^2}, \qquad \frac{\partial y_2}{\partial u^1} = -\frac{\partial y_1}{\partial u^2} \tag{12.3.2}$$

となる．こうして $\zeta = y_1 + iy_2$ は $z = u^1 + iu^2$ の正則関数である．従って，(y_1, y_2) も等温座標系である (cf. 補題 13.8)．よって，等温座標系 (y_1, y_2) に関して，

$$\begin{cases} \phi_3(\zeta) = \dfrac{\partial f}{\partial y_1} - i\dfrac{\partial f}{\partial y_2}, \\ \phi_1(\zeta) = \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} - i\dfrac{\partial x_1}{\partial y_2}, \\ \phi_2(\zeta) = \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} - i\dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{cases}$$

とおくと，

$$\sum_{a=1}^{3} \phi_a^2 = 0$$

が成り立つ．$x_1 = y_1$, $x_2 = ay_1 + by_2$ より $\phi_1 = 1$, $\phi_2 = a - ib$ だから

$$\phi_3(\zeta) = \frac{\partial f}{\partial y_1} - i\frac{\partial f}{\partial y_2}$$

は定数である．よって，f は x_1, x_2 の線形関数である．■

問 12.24　(12.3.2) を示せ．

12.4　極小曲面の安定性

第 2 変分公式 (12.1.13) および命題 12.12 より，グラフ極小曲面は安定である．故に Bernstein の定理の拡張として安定な極小曲面を議論しよう．

定理 12.25 (Pogorelov の定理)　S を $\mathbf{R}^3$ 内の極小曲面とし，$D_\rho(p)$ を点 $p \in S$ を中心，半径 ρ の測地的円板とする．次の (i) と (ii) のうちの 1 つが成り立つならば，D は不安定である．

(i)　ある $0 < r_0 < \rho$ が存在して，

$$\left| \iint_{D_{r_0}(p)} K dA \right| > \frac{L(\partial D_\rho(p))}{2\rho \log \dfrac{\rho}{r_0}}$$

が成り立つ．ただし，$D_{r_0}(p)$ は p 中心，半径 r_0 の S 上の測地的円板である．

(ii)
$$\mathrm{vol}(D) > \frac{4}{3}\pi\rho^2$$
が成り立つ．

証明　(i)　曲面 $\mathbf{x}$ に対して，変分 $\mathbf{x}_\varepsilon = \mathbf{x} + \varepsilon f \mathbf{e}$ とおくと，第 2 変分公式
$$A''(0) = \iint_{D_\rho(p)} (|\mathrm{grad} f|^2 + 2Kf^2)dA$$
が成り立つ．$D_\rho(p)$ が点 $p \in S$ を中心，半径 ρ の測地的円板だから，極座標 (r, θ) を考えると第 1 基本形式は
$$ds^2 = dr^2 + \varphi^2 d\theta^2$$
の形になる．ただし，$\varphi > 0$ は $D_\rho(p)$ 上の関数である．次のように関数 f を
$$f(r) = \begin{cases} 1 & r \leq r_0, \\ \dfrac{r}{r_0 - \rho} - \dfrac{\rho}{r_0 - \rho} & r_0 < r < \rho \end{cases}$$
で定義すると，$dA = \varphi dr d\theta$, $2Kf^2 \leq 0$ により，
$$\begin{aligned} A''(0) &= \iint_{D_\rho(p)} (|\mathrm{grad} f|^2 + 2Kf^2)\varphi dr d\theta \\ &= \iint_{D_\rho(p)} f'f'\varphi dr d\theta + \iint_{D_\rho(p)} 2Kf^2 \varphi dr d\theta \\ &\leq \int_0^\rho \int_0^{2\pi} f'f'\varphi dr d\theta + \iint_{D_{r_0}(p)} 2Kf^2\varphi dr d\theta \end{aligned}$$
となる．半径 r に対応する測地的円周の長さ $L(r)$ を
$$L(r) = \int_0^{2\pi} \varphi(r, \theta) d\theta$$
で表わす．変数変換
$$\overline{r}(r) = \int_{r_0}^r \frac{1}{L(t)} dt + \overline{r}(r_0)$$
を行うと，$\overline{r}$ は r の単調増加関数である．よって，
$$f(\overline{r}) = \begin{cases} 1 & \overline{r} \leq \overline{r}(r_0), \\ \dfrac{\overline{r}}{\overline{r}(r_0) - \overline{r}(\rho)} - \dfrac{\overline{r}(\rho)}{\overline{r}(r_0) - \overline{r}(\rho)} & \overline{r}(r_0) < \overline{r} < \overline{r}(\rho) \end{cases}$$
となり，
$$A''(0) \leq \int_0^\rho \int_0^{2\pi} f'f'\varphi dr d\theta + \iint_{D_{r_0}(p)} 2Kf^2 \varphi dr d\theta$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{r_0}^{\rho} \left(\frac{df}{dr}\right)^2 L(r)dr + \iint_{D_{r_0}(p)} 2KdA \\
&= \int_{\overline{r}(r_0)}^{\overline{r}(\rho)} \left(\frac{df}{d\overline{r}}\right)^2 d\overline{r} + \iint_{D_{r_0}(p)} 2KdA \\
&= \int_{\overline{r}(r_0)}^{\overline{r}(\rho)} \left(\frac{1}{\overline{r}(r_0) - \overline{r}(\rho)}\right)^2 d\overline{r} + \iint_{D_{r_0}(p)} 2KdA \\
&= -\frac{1}{\overline{r}(r_0) - \overline{r}(\rho)} + \iint_{D_{r_0}(p)} 2KdA \\
&= \frac{1}{\displaystyle\int_{r_0}^{\rho} \frac{1}{L(r)} dr} + \iint_{D_{r_0}(p)} 2KdA
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

$$
L(r) = \int_0^{2\pi} \varphi(r, \theta) d\theta
$$

を r で微分して

$$
L'(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi(r, \theta)}{\partial r} d\theta,
$$

$$
L''(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \varphi(r, \theta)}{\partial r^2} d\theta
$$

である．$\dfrac{\partial^2 \varphi(r, \theta)}{\partial r^2} = -K\varphi \geq 0$ により，$L''(r) \geq 0$ だから

$$
\left(\frac{L(r)}{r}\right)' = \frac{rL'(r) - L(r)}{r^2} \geq 0 \tag{12.4.1}
$$

を使って

$$
\frac{L(r)}{r} \leq \frac{L(\rho)}{\rho}
$$

が成り立つ．故に，

$$
\int_{r_0}^{\rho} \frac{1}{L(r)} dr \geq \frac{\rho}{L(\rho)} \int_{r_0}^{\rho} \frac{1}{r} dr = \frac{\rho}{L(\rho)} \log \frac{\rho}{r_0}
$$

が成立する．よって，$A''(0)$ は

$$
A''(0) \leq \frac{1}{\displaystyle\int_{r_0}^{\rho} \frac{1}{L(r)} dr} + \iint_{D_{r_0}(p)} 2KdA
$$

$$= -2\Big(\Big|\iint_{D_{r_0}(p)} KdA\Big| - \frac{L(\rho)}{2\rho\log\dfrac{\rho}{r_0}}\Big) < 0$$

を満たす．故に，D は不安定である．

(ii)　f が r のみの関数のとき，$\dfrac{\partial^2\varphi(r,\theta)}{\partial r^2} = -K\varphi$ により，

$$A''(0) = \iint_D (|\mathrm{grad} f|^2 + 2Kf^2)dA$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\rho}(f')^2\varphi drd\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^{\rho} 2\Big(-\frac{\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}}{\varphi}\Big)f^2\varphi drd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\rho}(f')^2\varphi drd\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^{\rho} 2\Big(-\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\Big)f^2 drd\theta.$$

$f(r) = 1 - \dfrac{r}{\rho}$ とおくと，$A''(0)$ は

$$A''(0) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\rho}\frac{1}{\rho^2}\varphi drd\theta + \int_0^{2\pi}\Big(2 + \int_0^{\rho} 2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial f^2}{\partial r}dr\Big)d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\rho}\frac{1}{\rho^2}\varphi drd\theta + \int_0^{2\pi}\Big(2 - \int_0^{\rho} 2\varphi\frac{\partial^2 f^2}{\partial r^2}dr\Big)d\theta$$

$$= 4\pi - 3\int_0^{2\pi}\int_0^{\rho}\frac{1}{\rho^2}\varphi drd\theta$$

$$= 4\pi - 3\frac{\mathrm{vol}D}{\rho^2} < 0$$

を満たす．よって，D は不安定である．■

定理 12. 26 (do Carmo-Peng, Fischer-Colbrie-Schoen の定理)　S を $\mathbf{R}^3$ 内の完備，単連結な極小曲面とする．もしも S が安定であるならば，S は平面である．

証明　S が極小曲面だから，Gauss 曲率 K が $K \leq 0$ を満たす．S が単連結かつ完備だから，S は $\mathbf{R}^2$ と微分同相である．従って，S の領域を考えるとき，測地的円板 $D_\rho(p)$ を考えればよい．

(1)　$K \equiv 0$ のとき，S が全測地的である．よって S は平面である．

(2)　$K \not\equiv 0$ のとき，ある $r_0 > 0$ があって，

$$\iint_{D_{r_0}(p)} KdA \neq 0$$

が成り立つ．もしも

$$\lim_{r\to\infty}\frac{L(r)}{r}=c<\infty \quad \text{ならば,} \quad \lim_{\rho\to\infty}\frac{L(\rho)}{2\rho\log\dfrac{\rho}{r_0}}=0$$

となる．従って Pogorelov の定理により，ある ρ_0 に対して $D_{\rho_0}(p)$ が不安定である．仮定より S が安定だから，これは矛盾である．

もしも $\displaystyle\lim_{r\to\infty}\frac{L(r)}{r}=\infty$ ならば，(12.4.1) により，

$$\frac{1}{\rho^2}\int_0^\rho L(r)dr \geq \frac{1}{\rho^2}\int_{\frac{\rho}{2}}^\rho L(r)dr$$

$$\geq \frac{1}{\rho^2}\int_{\frac{\rho}{2}}^\rho \frac{L\left(\frac{\rho}{2}\right)}{\frac{\rho}{2}}rdr=\frac{3L\left(\frac{\rho}{2}\right)}{4\rho}\to\infty \qquad (\rho\to\infty)$$

を得る．

$$\mathrm{vol}(D_\rho(p))=\int_0^\rho L(r)dr$$

により，ある ρ_0 に対して，

$$\mathrm{vol}(D_{\rho_0}(p))>\frac{4}{3}\pi\rho_0^2$$

が成り立つ．従って Pogorelov の定理により，この ρ_0 に対して $D_{\rho_0}(p)$ が不安定である．仮定より S が安定だから，これは矛盾である．故に $K\equiv 0$，すなわち，S は平面である．∎

問 12.27　グラフ極小曲面は安定であることを示せ．

第13章　平均曲率が一定な曲面

曲面の曲がり方を測るために，Gauss 曲率と平均曲率は重要な役割を果たしている．Gauss 曲率は曲面の内在的量として Riemann 計量により決まる．一方，平均曲率は曲面の外在的量として，曲面の空間でのおかれ方を測る重要な量である．

第 10 章で Gauss 曲率が一定の完備曲面の形を決定した．次に考える対象となる曲面は平均曲率が一定の完備曲面だろう．特に平均曲率が 0 の曲面 (極小曲面という) を前章で解説し，この章で極小でない平均曲率が一定の曲面を議論しよう．平均曲率一定の曲面の形はどんな条件の下で決定できるだろうか？

この問題に関して Hadamard の定理，Hopf の定理，Alexandrov の定理および Klotz-Osserman の定理を解説しよう．

13.1　Hadamard の定理

この節では Hadamard の定理を証明する．

定義 13.1　p と q を $\mathbf{R}^3$ の点とする．点 p と q の間の線分を pq と表す．部分集合 $U \subset \mathbf{R}^3$ が**凸**とは，任意の点 p と q に対して，線分 pq が $pq \subset U$ を満たすことである．**凸体**とは内点を持つコンパクトな凸集合である．

定理 13.2　$\mathbf{R}^3$ 内の凸体の境界曲面の Gauss 曲率は非負である．

証明　凸体の境界曲面の点 p で Gauss 曲率 K が $K < 0$ を満たすとすると，点 p で主曲率の 1 つ κ_1 は負で，κ_1 に対応する主曲率方向と境界曲面の点 p における単位法線ベクトルにより決まる平面と境界曲面との交わりは負曲率を持つ曲線である．従って，点 p の近くで 2 点 p' と q' をとると，線分 $p'q'$ はこの

凸体に含まれない．これは矛盾である．故に，凸体の境界曲面の Gauss 曲率は非負であることがわかる． ∎

S を $\mathbf{R}^3$ 内の向き付け可能な曲面とする．従って，単位法線ベクトル $\mathbf{e}$ が S 上に存在する．S から単位球面 $S^2(1)$ への写像 $N : S \mapsto S^2(1)$ を $N(p) = \mathbf{e}(p), p \in S$ によって定める．これを S の **Gauss 写像**という．

定理 13.3 (Hadamard の定理)　S が $\mathbf{R}^3$ 内の正の Gauss 曲率を持つ種数 g の閉曲面とする．このとき，$g = 0$ かつ Gauss 写像 $N : S \to S^2(1)$ は微分同相である．

証明　Gauss-Bonnet の定理により，

$$\iint_S KdA = 4\pi(1-g)$$

である．仮定 $K > 0$ により，$g < 1$ でなければならない．g が非負整数だから，これより $g = 0$ が成り立つ．

次に，Gauss 写像 $N : S \to S^2(1)$ が微分同相であることを示す．

$K > 0$ により，Gauss 写像 N が局所的に微分同相であることがわかる．故に $N(S)$ は $S^2(1)$ の開部分集合である．S がコンパクトで，N が微分可能な写像だから，$N(S)$ は $S^2(1)$ の閉部分集合である．従って $N(S) = S^2(1)$ が成り立つ．もしも S の相異なる 2 点 p_1 と p_2 で $N(p_1) = N(p_2) \in S^2(1)$ ならば，N が局所的に微分同相だから，p_1 の開近傍 U が存在して，$N(S \setminus U) = S^2(1)$ が成り立つ．従って，$K > 0$ により

$$\iint_{S\setminus U} KdA \geq 4\pi$$

である．故に

$$\iint_S KdA > 4\pi$$

となる．Gauss-Bonnet の定理により，これは不可能である． ∎

問 13.4　Gauss 曲率 $K > 0$ ならば，Gauss 写像 N が局所的に微分同相であることを示せ．

問 13.5　$f : M \to S^2$ が局所的に (微分) 同相で，M は単連結コンパクト曲面のとき，f は (微分) 同相であることを証明せよ．

(ヒント：$p_1, p_2 \in M, p_1 \neq p_2$ で $f(p_1) = f(p_2)$ を満たす 2 点が存在したと

仮定する．p_1 と p_2 を結ぶ曲線の f による像は $f(p_1)$ を基点とするループで，このループは点曲線 $f(p_1)$ とホモトピックであることから矛盾を導け．）

13.2 Hopf の定理

まず，$\mathbf{R}^3$ 内の平均曲率一定な曲面に関する Liebmann の定理を紹介しよう．

定理 13.6 $\mathbf{R}^3$ 内の平均曲率が一定で正の Gauss 曲率を持つコンパクトな曲面 S は，ある半径の球面である．

証明 平均曲率の定義より，$2H = \kappa_1 + \kappa_2$ である．主曲率 κ_1, κ_2 が連続関数だから，κ_1, κ_2 は最大値と最小値をとる．もしも S 上に臍点でない点が存在すれば，平均曲率が一定だから，$\kappa_1(p) > \kappa_2(p)$, $\kappa_1(p)$ が κ_1 の最大値，$\kappa_2(p)$ が κ_2 の最小値となる点 p が存在する．Hilbert の補題 (補題 10.17) より，点 p で Gauss 曲率が非正である．これは Gauss 曲率が正と矛盾となる．従って，S は全臍的である．定理 10.16 (ii) によって，S はある半径の球面である． ∎

Liebmann の定理より，もっと一般的な定理が Hopf により証明された．

定理 13.7 (Hopf の定理) 球面と同相な曲面 $S \subset \mathbf{R}^3$ の平均曲率が一定ならば，S はある半径 r の球面である．

この定理を示すために，以下の補題を用意する．

補題 13.8 (u^1, u^2) が曲面の等温座標系のとき，複素変数 $z = u^1 + iu^2$ もこの曲面の等温座標系という．もしも $z = z(w)$, $w = v^1 + iv^2$ が正則な座標変換ならば，w も曲面 $\mathbf{x} : D \to \mathbf{R}^3$ の等温座標系である．

証明 $z = u^1 + iu^2$ が曲面 $\mathbf{x} : D \to \mathbf{R}^3$ の等温座標だから

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2} \right\rangle, \qquad \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2} \right\rangle = 0 \tag{13.2.1}$$

が成り立つ．$z = z(w)$ が正則な座標変換であるので，

$$\frac{\partial u^1}{\partial v^1} = \frac{\partial u^2}{\partial v^2}, \qquad \frac{\partial u^1}{\partial v^2} = -\frac{\partial u^2}{\partial v^1} \tag{13.2.2}$$

が成立する．よって，

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v^1} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1}\frac{\partial u^1}{\partial v^1} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2}\frac{\partial u^2}{\partial v^1},$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v^2} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1}\frac{\partial u^1}{\partial v^2} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2}\frac{\partial u^2}{\partial v^2}$$

である．従って，

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v^1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v^1} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} \right\rangle \left(\frac{\partial u^1}{\partial v^1}\right)^2 + \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} \right\rangle \left(\frac{\partial u^2}{\partial v^1}\right)^2 \\
&= \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} \right\rangle \left\{ \left(\frac{\partial u^1}{\partial v^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^2}{\partial v^1}\right)^2 \right\}, \\
\left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v^2}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v^2} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} \right\rangle \left(\frac{\partial u^1}{\partial v^2}\right)^2 + \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} \right\rangle \left(\frac{\partial u^2}{\partial v^2}\right)^2 \\
&= \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} \right\rangle \left\{ \left(\frac{\partial u^1}{\partial v^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^2}{\partial v^2}\right)^2 \right\}, \\
\left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v^1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v^2} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} \right\rangle \frac{\partial u^1}{\partial v^1}\frac{\partial u^1}{\partial v^2} + \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2} \right\rangle \frac{\partial u^2}{\partial v^1}\frac{\partial u^2}{\partial v^2} \\
&= \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} \right\rangle \left(\frac{\partial u^1}{\partial v^1}\frac{\partial u^1}{\partial v^2} + \frac{\partial u^2}{\partial v^1}\frac{\partial u^2}{\partial v^2} \right)
\end{aligned}$$

を得る．こうして (13.2.2) により，

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v^1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v^1} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v^2}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v^2} \right\rangle, \qquad \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v^1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v^2} \right\rangle = 0$$

が成り立つ．つまり，w は曲面 $\mathbf{x} : D \to \mathbf{R}^3$ の等温座標系である．　■

定理 13.7 の証明　$\mathbf{x} : D \to \mathbf{R}^3$ を S の正則表示とする．S が曲面なので，等温座標系 (u^1, u^2) が存在し，

$$g_{11} = g_{22} = E, \qquad g_{12} = 0, \qquad ds^2 = E\{(du^1)^2 + (du^2)^2\}$$

が成り立つことがよく知られている．しかし，それの証明は難しいので，ここでは扱わないことにする．極小曲面に関して，その存在証明は容易である．実際にそのことを補題 12.14 で証明した．このとき，Gauss 曲率 K と平均曲率 H が次のように書ける．

$$\begin{cases} K = \kappa_1\kappa_2 = \dfrac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{E^2}, \\ H = \dfrac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \dfrac{h_{11} + h_{22}}{2E}. \end{cases} \tag{13.2.3}$$

$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(u^1(s), u^2(s))$ を曲率線とすると，$\mathbf{x}'(s)$ は主曲率ベクトル場であるから，命題 4.23 の証明で用いた式 (4.4.1) により，

$$h_{ij}\frac{du^i}{ds} - \kappa g_{ij}\frac{du^i}{ds} = 0 \qquad (j = 1, 2)$$

が成り立つ．従って，主曲率方向 $\left(\dfrac{du^1}{ds}, \dfrac{du^2}{ds}\right)$ は次の方程式を満たす．

$$\begin{vmatrix} h_{1j}\dfrac{du^j}{ds} & g_{1j}\dfrac{du^j}{ds} \\ h_{2j}\dfrac{du^j}{ds} & g_{2j}\dfrac{du^j}{ds} \end{vmatrix} = 0. \tag{13.2.4}$$

故に

$$-h_{12}\Big(\frac{du^1}{ds}\Big)^2 + (h_{11} - h_{22})\frac{du^1}{ds}\frac{du^2}{ds} + h_{12}\Big(\frac{du^2}{ds}\Big)^2 = 0 \tag{13.2.5}$$

を得る．曲面の基本方程式 (定理 5.1) により，第 1 種 Christoffel 記号は

$$\Gamma^1_{11} = \frac{E_{u^1}}{2E}, \qquad \Gamma^1_{12} = \frac{E_{u^2}}{2E}, \qquad \Gamma^1_{22} = -\frac{E_{u^1}}{2E},$$
$$\Gamma^2_{11} = -\frac{E_{u^2}}{2E}, \quad \Gamma^2_{12} = \frac{E_{u^1}}{2E}, \qquad \Gamma^2_{22} = \frac{E_{u^2}}{2E}$$

となる．更に，Codazzi の方程式 (5.2.5)

$$\partial_k h_{ij} - \partial_j h_{ik} = h_{j\ell}\Gamma^\ell_{ik} - h_{k\ell}\Gamma^\ell_{ij}$$

により，

$$\frac{\partial h_{11}}{\partial u^2} - \frac{\partial h_{12}}{\partial u^1} = \frac{\partial E}{\partial u^2}\,\frac{h_{11} + h_{22}}{2E} = \frac{\partial E}{\partial u^2}H,$$
$$\frac{\partial h_{12}}{\partial u^2} - \frac{\partial h_{22}}{\partial u^1} = -\frac{\partial E}{\partial u^1}\,\frac{h_{11} + h_{22}}{2E} = -\frac{\partial E}{\partial u^1}H$$

を得る．更に，

$$\frac{\partial E}{\partial u^2}H = \frac{\partial (EH)}{\partial u^2} - E\frac{\partial H}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u^2}\Big(\frac{h_{11} + h_{22}}{2}\Big) - E\frac{\partial H}{\partial u^2},$$
$$-\frac{\partial E}{\partial u^1}H = -\frac{\partial (EH)}{\partial u^1} + E\frac{\partial H}{\partial u^1} = -\frac{\partial}{\partial u^1}\Big(\frac{h_{11} + h_{22}}{2}\Big) + E\frac{\partial H}{\partial u^1}$$

により，

$$\frac{\partial}{\partial u^2}\Big(\frac{h_{11} - h_{22}}{2}\Big) - \frac{\partial h_{12}}{\partial u^1} = -E\frac{\partial H}{\partial u^2}, \tag{13.2.6}$$
$$\frac{\partial}{\partial u^1}\Big(\frac{h_{11} - h_{22}}{2}\Big) + \frac{\partial h_{12}}{\partial u^2} = E\frac{\partial H}{\partial u^1} \tag{13.2.7}$$

が成り立つ．

複素変数 $z = u^1 + iu^2$ とおいて，複素数値関数 $\phi = \dfrac{h_{11} - h_{22}}{2} - ih_{12}$ を考える．(13.2.3) より

$$\frac{|\phi|^2}{E^2} = \frac{1}{4}(\kappa_1 - \kappa_2)^2$$

を得る．従って，点 $p \in S$ が臍点 $(\kappa_1 = \kappa_2)$ であるための必要十分条件は，点 p で $\phi = 0$ であることである．

次に，

$$\begin{aligned}\phi dzdz &= \Big(\frac{h_{11} - h_{22}}{2} - ih_{12}\Big)(du^1 + idu^2)^2 \\ &= \frac{h_{11} - h_{22}}{2}\{(du^1)^2 - (du^2)^2\} + 2h_{12}du^1du^2 \\ &\quad + i\{(h_{11} - h_{22})du^1du^2 - h_{12}(du^1)^2 + h_{12}(du^2)^2\}\end{aligned}$$

だから，(13.2.5) により，$\left(\dfrac{du^1}{ds}, \dfrac{du^2}{ds}\right)$ が主曲率方向になるための必要十分条件は

$$\mathfrak{Im}(\phi dzdz) = 0$$

が成り立つことである．

(13.2.6) および (13.2.7) により，

$$\frac{d\phi}{d\bar{z}} = E\frac{dH}{dz}$$

と書ける．こうして平均曲率 H が一定であることと ϕ が正則であることは同値であることがわかる．

次に，2 次微分 $\phi\, dzdz$ が曲面 S の正則な座標変換によらないことを示す．

$$\frac{d\mathbf{x}}{dz} \cdot \frac{d\mathbf{e}}{dz} = \frac{1}{4}(-h_{11} + h_{22} + i2h_{12}) \tag{13.2.8}$$

により，

$$\phi = -2\frac{d\mathbf{x}}{dz} \cdot \frac{d\mathbf{e}}{dz}$$

が成立する．

正則な座標変換 $z = z(w)$ とおくと，z が等温座標であるから，補題 13.8 により w も等温座標である．

w で定まる 2 次微分を $\phi^* dwdw$ と表すと，

$$\phi^* = -2\frac{d\mathbf{x}}{dw} \cdot \frac{d\mathbf{e}}{dw}$$

である．

$$\frac{d\mathbf{x}}{dw} = \frac{d\mathbf{x}}{dz}\frac{dz}{dw},$$
$$\frac{d\mathbf{e}}{dw} = \frac{d\mathbf{e}}{dz}\frac{dz}{dw}$$

だから $\phi\, dzdz = \phi^* dwdw$ を得る．故に，$\phi\, dzdz$ は正則な座標変換によらないことが解る．従って，$\phi\, dzdz$ は S 上の大域的に正則な 2 次微分である．S が球面と同相により，このようなものは自明なものしか存在しないことが知られているから，S における $\phi = 0$ が成り立つ．故に，S 上の任意点で主曲率が等しい．よって S はある半径の球面である． ∎

問 13. 9　(13.2.8) を示せ．

13. 3　Alexandrov の定理

A.D.Alexandrov は平均曲率一定な曲面が標準的球面となるための条件を与えた．ここでは偏微分方程式の結果を (証明なしに) 用いて Alexandrov の定理を証明する．Alexandrov の定理を述べる前に，必要な準備をする．

補題 13. 10　f を $\mathbf{R}^3$ 内の有界領域 Ω で定義された関数とする．f は

$$\begin{cases} \Delta f = v & (\Omega\text{の内部}), \\ f = u & (\Omega\text{の境界}\partial\Omega) \end{cases}$$

を満たすとき，

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \Delta|\nabla f|^2 dV \geq -\frac{2}{3}\int_\Omega v^2 dV + \int_{\partial\Omega} vD_\nu f dA \tag{13.3.1}$$

が成り立つ．ただし，ν は領域 Ω の境界での外向き単位法線ベクトルで，$D_\nu f$ は f の ν 方向の方向微分である．

証明　$|\nabla f|^2 = \displaystyle\sum_{j=1}^{3}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big)^2$ より，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 &= \sum_{i,j=1}^{3}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\Big)^2 + \sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial x_j\partial x_j} \\ &= \sum_{i,j=1}^{3}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\Big)^2 + \sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial^3 f}{\partial x_j\partial x_j\partial x_i}\end{aligned}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{3} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 + \langle \nabla f,\, \nabla(\Delta f) \rangle$$

が成り立つ．

$$\sum_{i,j=1}^{3} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 \geq \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} \right)^2 \geq \frac{1}{3} (\Delta f)^2$$

が成立するから，

$$\frac{1}{2} \Delta |\nabla f|^2 \geq \frac{1}{3} (\Delta f)^2 + \langle \nabla f,\, \nabla(\Delta f) \rangle$$

を得る．積分することにより，

$$\int_\Omega \frac{1}{2} \Delta |\nabla f|^2 dV \geq \int_\Omega \frac{1}{3} (\Delta f)^2 dV + \int_\Omega \langle \nabla f,\, \nabla(\Delta f) \rangle dV \tag{13.3.2}$$

である．Green の公式により，

$$\int_\Omega \langle \nabla f,\, \nabla(\Delta f) \rangle dV = -\int_\Omega (\Delta f)^2 dV + \int_{\partial\Omega} v D_\nu f dA$$

だから，(13.3.2) により補題 13.10 が成り立つ．

補題 13.11　S を $\mathbf{R}^3$ 内の曲面とする．点 $p \in S$ において，

$$(g_{ij})_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \left. \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right|_p = 0 \qquad (i,\, j,\, k = 1,\, 2),$$

$$(\Delta_S f)_p = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(p)$$

を満たす S の正則表示が存在する．ただし，Δ_S は曲面 S の Laplace 微分作用素である．

証明　点 $p \in S$ を原点とし，p における単位法線ベクトルが x_3 軸を向いているように S を移動する．点 p における S の正則表示 (Monge Patch) が次のように書ける．

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ F(x_1,\, x_2) \end{pmatrix}.$$

よって，S の第 1 基本形式 $g = (g_{ij})$ は

$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 & \dfrac{\partial F}{\partial x_1}\dfrac{\partial F}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_1}\dfrac{\partial F}{\partial x_2} & 1 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2 \end{pmatrix}$$

になる．p における単位法線ベクトルが x_3 軸の正方向だから，

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_p = \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)_p = 0.$$

よって，

$$(g_{ij})_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．更に，計算により，

$$\left.\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right|_p = 0 \tag{13.3.3}$$

を得る．このとき S 上の Laplace 微分作用素の定義

$$\Delta_S f = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial\left(\sqrt{\det(g_{k\ell})}\, g^{ij} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j} \tag{13.3.4}$$

により，点 p で明らかに

$$(\Delta_S f)_p = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(p) \tag{13.3.5}$$

が成り立つ． ∎

問 13. 12　(13.3.3) を示せ．

問 13. 13　(13.3.4) により，(13.3.5) を示せ．

補題 13. 14　S を $\mathbf{R}^3$ 内の曲面とする．f を $\mathbf{R}^3$ 内の領域 Ω 上で定義された関数とし，$F = f|_{S\cap\Omega}$ とおく．このとき，

$$\Delta_E f(p) = (\Delta_S F)(p) - 2H(p) D_{\nu_p} f + D_{\nu_p}^2 f$$

が成り立つ．ただし，Δ_E は Euclid 空間 $\mathbf{R}^3$ の Laplace 微分作用素である．

証明　S の点 p での主曲率方向を x_1, x_2 軸とし，関数 f を $x_i x_3$-平面と S との交線に制限すると，

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dx_i} \qquad (i = 1,\ 2),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_3}\frac{dx_3}{dx_i} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}\Big(\frac{dx_3}{dx_i}\Big)^2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{d^2 x_3}{dx_i^2} \quad (i = 1,\, 2)$$

が成り立つ．$i = 1, 2$ について点 p で平面曲線 $(x_i,\, x_3(x_i))$ が x_i 軸に接するので，

$$\frac{dx_3}{dx_i}(p) = 0$$

である．よって，点 p で

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{d^2 x_3}{dx_i^2} \qquad (i = 1,\, 2)$$

となる．点 p で主曲率 x_i は平面曲線 $(x_i,\, x_3(x_i))$ の曲率だから，$\dfrac{d^2 x_3}{dx_i^2} = \kappa_i$(主曲率) が成り立つ．従って，

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \kappa_i \frac{\partial f}{\partial x_3} \qquad (i = 1,\, 2)$$

である．故に，補題 13.10 により，点 p で

$$\begin{aligned}
\Delta_S F(p) =& \Big(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}\Big)(p) \\
=& \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\Big)(p) + \kappa_1 \frac{\partial f}{\partial x_3}(p) + \kappa_2 \frac{\partial f}{\partial x_3}(p) \\
=& \Delta_E f(p) + 2H(p)\frac{\partial f}{\partial x_3}(p) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(p) \\
=& \Delta_E f(p) + 2H(p) D_{\nu_p} f - D_{\nu_p}^2 f(p)
\end{aligned}$$

となる．∎

問 13. 15　平面曲線 $(x,\, \phi(x))$ の曲率 κ は次の式を満たすことを示せ．

$$\kappa = \frac{\phi''}{\{1 + (\phi')^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

特に，x 軸に接する点で $\kappa = \phi''$ が成り立つ．

定理 13. 16 (Minkowski の公式)　S を $\mathbf{R}^3$ 内のコンパクトな曲面とし，ν_p を p における S の外向きの単位法線ベクトルとする．このとき，台関数 $P = \langle \nu_p,\, p\rangle$ は次の式を満たす．

$$\mathrm{vol}(S) = -\iint_S HPdA.$$

ただし，H は S の平均曲率である．

証明　関数

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

を考える．$\Delta_E f = 3$ である．$\nu_p = \sum_a \nu^a \partial_a$ とおけば，

$$D_{\nu_p} f = \sum_a x_a \nu^a = \langle \nu_p, p \rangle = P,$$
$$D_{\nu_p}^2 f = \sum_a \nu^a \nu^a = 1$$

である．補題 13.14 により

$$\Delta_S F(p) = 2 + 2H(p)P$$

だから，Stokes の定理により

$$\iint_S \Delta_S F dA = 0$$

となる．従って，

$$\iint_S (1 + HP) dA = 0$$

である．すなわち，$\mathrm{vol}(S) = -\iint_S HPdA$ が成り立つ．■

定理 13. 17 (Alexandrov の定理)　$\mathbf{R}^3$ 内の有界領域 Ω の境界 S は滑らかな曲面とする．もしも S の平均曲率 H が一定ならば，S はある半径 r の球面である．

証明　Minkowski の公式により

$$\mathrm{vol}(S) = -\iint_S HPdA \tag{13.3.6}$$

が成り立つ．f_1 を Ω 上で定義された関数とすると，Stokes の定理より

$$\iiint_\Omega \Delta_E f_1 dV = \iint_S D_\nu f_1 dA$$

が成り立つ．特に，$f_1 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ のとき，$\Delta_E f_1 = 3$, $D_{\nu_p} f_1 = \langle \nu, p \rangle = P$ だから

$$3\mathrm{vol}(\Omega) = \iint_S D_\nu f_1 dA = \iint_S PdA \tag{13.3.7}$$

である．従って，(13.3.6) および (13.3.7) により

$$H = -\frac{\mathrm{vol}(S)}{3\mathrm{vol}(\Omega)} \tag{13.3.8}$$

となる．Ω は $\mathbf{R}^3$ 内の有界領域であるから，Ω^b はコンパクトである．このとき，次の条件を満たす Ω^b から $\mathbf{R}$ への関数 f が存在する．

$$\begin{cases} \Delta f = 1 & (\Omega\text{の内部}), \\ f = 0 & (\Omega\text{の境界}\partial\Omega) \end{cases}$$

(参照 Gilbarg-Trudinger [7])．$f|_S = 0$ により，点 $p \in S$ で ∇f が単位法線ベクトル $\nu_p = (\nu^1, \nu^2, \nu^3)$ に比例する．故に，

$$\nabla f = \langle \nabla f, \nu \rangle \nu$$

である．$D_\nu f = \langle \nabla f, \nu \rangle$ より

$$(\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f) = (\nu^1 D_\nu f, \nu^2 D_\nu f, \nu^3 D_\nu f)$$

が成り立つ．

一方，上の式を満たす関数 f に対して，

$$\begin{aligned} D_\nu^2 f D_\nu f &= \sum_{a,b=1}^{3} f_{ab} \nu^a \nu^b D_\nu f = \sum_{a,b=1}^{3} f_{ab} \nu^a (\nu^b D_\nu f) \\ &= \sum_{a,b=1}^{3} f_{ab} \nu^a f_b = \sum_{a,b=1}^{3} \nu^a \partial_a \left(\frac{1}{2} f_b^2 \right) \\ &= D_\nu \left(\frac{1}{2} |\nabla f|^2 \right) \end{aligned}$$

が成り立つから，補題 13.10 により

$$\frac{1}{2} \int_\Omega \Delta |\nabla f|^2 dV \geq -\frac{2}{3} \mathrm{vol}(\Omega) + \int_{\partial\Omega} D_\nu f dA$$

となる．Stokes の定理により

$$\iint_S D_\nu^2 f D_\nu f dA \geq -\frac{2}{3} \mathrm{vol}(\Omega) + \int_S D_\nu f dA \tag{13.3.9}$$

を得る．更に，このような関数 f に対して，補題 13.14 により

$$1 = -2H D_\nu f + D_\nu^2 f$$

が成立する．よって，

$$D_\nu^2 f D_\nu f - D_\nu f = 2H (D_\nu f)^2$$

を得る．上の式を積分すると，(13.3.9) より

$$2H\iint_S (D_\nu f)^2 \geq -\frac{2}{3}\mathrm{vol}(\Omega)$$

が成り立つ．Schwarz の不等式により

$$\left(\iint_S D_\nu f dA\right)^2 \leq \mathrm{vol}(S)\iint_S (D_\nu f)^2 dA$$

が成り立つ．従って $\iint_S D_\nu f dA = \mathrm{vol}(\Omega)$ により

$$\iint_S (D_\nu f)^2 dA \geq \frac{\{\mathrm{vol}(\Omega)\}^2}{\mathrm{vol}(S)}$$

を得る．故に

$$-H \leq \frac{\mathrm{vol}(S)}{3\mathrm{vol}(\Omega)}$$

が成り立つ．(13.3.8) と比べて $\mathrm{vol}(\Omega) \geq \mathrm{vol}(\Omega)$ となる．こうして，今までの不等式が全て等式でなければならない．すなわち，(13.3.9) が等式なので (13.3.1) もそうなる．従って補題 13.10 の証明により $f_{ab} = \alpha\delta_{ab}$ となる．$\Delta_E f = 1$ より

$$f_{ab} = \frac{1}{3}\delta_{ab}$$

である．故に，

$$f = \frac{1}{6}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \gamma$$

となる．$f|_S = 0$ により，S はある半径 r の球面である． ∎

13.4 Klotz-Osserman の定理

命題 13.18 D を曲面 S の等温座標系 x, y の定義領域とし，D 上で S の Gauss 曲率が符号を変えない (すなわち，$K \geq 0\,(\leq 0)$ が成り立つ) ならば，$\log\lambda(x, y)$ は D 上での優調和関数 (劣調和関数) である．ただし，$\lambda(x, y)$ は $I = \lambda(x, y)(dx^2 + dy^2)$ を満たす．

証明 x, y が等温座標系であるから，S の Gauss 曲率 K は次の式を満たす．

$$K = -\frac{1}{2\lambda}\Delta\log\lambda.$$

よって，$K \geq 0\,(\leq 0)$ ならば，$\Delta\log\lambda \leq 0\,(\geq 0)$ が成り立つ．従って，$\log\lambda$ は優調和関数 (劣調和関数) である． ∎

命題 13.19　平均曲率 H が一定となる曲面 S の臍点でない点のある近傍で，$L-N=2$, $M=0$ を満たす等温座標系 x, y が存在する．

証明　点 $p \in S$ を臍点でない点とする．点 p の近傍で S の主曲率 κ_1, κ_2 を $\kappa_1 > \kappa_2$ としておく．単位ベクトル $\mathbf{e}_i$ $(i=1, 2)$ を κ_i に対応する主曲率方向と仮定する．このとき $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ は直交している．$\mathbf{x} : D \to \mathbf{R}^3$ を S の正則表示とすると，$d\mathbf{x} = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2$ のように書ける．よって，第 1 基本形式 I は $I = \omega_1^2 + \omega_2^2$ で表せる．$\theta_i = \sqrt{\kappa_1 - \kappa_2}\,\omega_i$ とおくと，S の平均曲率が一定だから，

$$d\theta_i = 0 \tag{13.4.1}$$

が成り立つ．Poincaré の補題 (定理 6.5) により，$du_i = \theta_i$ となる D 上で定義された関数 u_i が存在する．故に，S の第 1 基本形式 I と第 2 基本形式 II はそれぞれ次のように表せる．

$$I = \rho(du_1^2 + du_2^2),$$
$$II = \rho\kappa_1 du_1^2 + \rho\kappa_2 du_2^2.$$

ただし $\rho = \dfrac{1}{\kappa_1 - \kappa_2}$ である．$u_1 = \sqrt{2}\,x$, $u_2 = \sqrt{2}\,y$ とおくと，

$$I = 2\rho(dx^2 + dy^2),$$
$$II = 2\rho\kappa_1 dx^2 + 2\rho\kappa_2 dy^2$$

が成り立つ．更に $L-N=2$, $M=0$ も得られた．よって命題が成り立つ．■

問 13.20　(13.4.1) を示せ．

命題 13.21　平均曲率 H が一定となる曲面 S の臍点でない点のある近傍で，次の式を満たす座標系 x, y が存在する．

$$\sqrt{H^2 - K}\,I = dx^2 + dy^2,$$
$$\sqrt{H^2 - K}\,II = (H + \sqrt{H^2 - K})dx^2 + (H - \sqrt{H^2 - K})dy^2.$$

証明　S 上での等温座標系を用いて，得られる第 2 基本量 L, M, N を使った関数

$$\frac{L-N}{2} - iM$$

を考える．平均曲率 H が定数であるための必要十分条件は $\dfrac{L-N}{2} - iM$ が

正則関数であることである．曲面 S の臍点は正則関数 $\dfrac{L-N}{2}-iM$ の零点であるから，曲面 S の点は全て臍点であるか，または曲面 S の臍点は孤立点である．命題 13.18 により，臍点でない点の近傍で適当な等温座標系を選ぶと $L-N=2$, $M=0$ が成り立つ．すなわち

$$\frac{L-N}{2}-iM=1$$

となる．$I=E(dx^2+dy^2)$ とすると，平均曲率と Gauss 曲率の定義により

$$2H=\frac{L+N}{E}, \qquad K=\frac{LN}{E^2}$$

である．従って，

$$E=\frac{1}{\sqrt{H^2-K}}, \qquad L=\frac{H}{\sqrt{H^2-K}}+1, \qquad N=\frac{H}{\sqrt{H^2-K}}-1$$

が成り立つ．故に命題が成立する．■

系 13.22 平均曲率 H が一定となる曲面 S の臍点でない点で計量 $\sqrt{H^2-K}\,I$ は平坦計量である．

命題 13.23 S を平均曲率 H が一定となる完備曲面とする．ある定数 $\varepsilon>0$ に対して，$H^2-K\geq\varepsilon^2$ が成り立つならば，S の普遍被覆曲面 (universal covering surface) Σ は平面と共形的である．更に，S は平面であるか，平面から 1 点を除いた曲面であるか，またはトーラスと共形的である．

証明 I を S の第 1 基本形式とすると，I に関して S が完備であるから，εI に関しても S は完備である．$\varepsilon I\leq\sqrt{H^2-K}\,I$ により，$\sqrt{H^2-K}\,I$ に関して，S も完備である．系 13.22 により，$\sqrt{H^2-K}\,I$ は平坦計量である．従って，計量 $\sqrt{H^2-K}I$ を持つ S の普遍被覆 Σ は平面である．よって，S の普遍被覆曲面 Σ は平面と共形的である．このとき，S は平面であるか，平面から 1 点を除いたものであるか，またはトーラスと共形的である．■

命題 13.24 完備曲面 S 上で $K\geq 0$ ならば，$K\equiv 0$ または S が単連結である．更に，S は球面と共形的であるか，または S は放物的である．

証明 S が完備非コンパクトな曲面の場合，$K\geq 0$ だから，Huber の定理の系 11.13 より，S が有限連結である．従って，S はコンパクト 2 次元多様体 N から k 個点を除いたものと同相である．Cohn-Vossen の定理 11.3 により，

$$\iint_S K dA \leq 2\pi\left(\chi(N) - k\right)$$

が成り立つ．$K \geq 0$ より，$1 \leq k \leq 2$ である．$k = 2$ のとき，$K \equiv 0$．$k = 1$ のとき，もしも $K \not\equiv 0$ ならば N は球面同相である．つまり，S は球面から 1 点を除いたものと同相である．故に $K \equiv 0$ または S が単連結である．

S がコンパクトならば，$K \geq 0$ と Guass-Bonnet の定理により，$K \equiv 0$ または S の種数はゼロである．故に球面と同相である．

更に，S がコンパクトで $K \not\equiv 0$ ならば，S は球面と共形的である．S が完備，非コンパクトならば，$K \geq 0$ および Huber の定理の系 11.13 により，S は放物的である．∎

定理 13.25 (Klotz-Osserman の定理)　S を $\mathbf{R}^3$ 内の平均曲率 H が一定で完備な曲面とする．S の Gauss 曲率 K が符号を保つならば，S は球面であるか，極小曲面であるか，円柱面である．

証明　平均曲率 H が一定であるから，$H = 0$，または $H \neq 0$ である．$H = 0$ のとき，S は極小曲面である．

以下，$H \neq 0$ の場合を考える．

$K \leq 0$ のとき，命題 13.18 により，$\log(H^2 - K)$ は優調和関数である．

$$\log(H^2 - K) \geq \log H^2$$

であるから，命題 13.23 により，S の普遍被覆曲面 Σ は放物的である．よって，$H^2 - K$ は定数である．故に，K が定数である．従って，命題 13.21 により S の計量は平坦計量である．よって，$K \equiv 0$ かつ S は円柱面である．

$K \geq 0$ のとき，命題 13.24 により，$K \equiv 0$ または S が単連結である．$K \equiv 0$ ならば，S は円柱面である．

$K \not\equiv 0$ ならば，S がコンパクトのとき，命題 13.24 により S は球面と共形的である．よって，Hopf の定理より，S は球面である．

S が完備かつ非コンパクトのとき，S は放物的である．命題 13.18 と命題 13.21 により，$\log(H^2 - K) \leq \log H^2$ が劣調和関数であるから，K は定数である．従って，命題 13.21 により，S の計量は平坦計量である．よって $K \equiv 0$．これは矛盾である．∎

第14章　主曲率の1つが一定な完備曲面

Gauss 曲率一定，または平均曲率一定の曲面について第10章，第12章と第13章で議論し，幾つかの重要な定理を示した．しかし，Gauss 曲率も，平均曲率も一定でない曲面が一般的である．たとえば，回転トーラスの Gauss 曲率の符号は変わるし，平均曲率は一定でないが，主曲率の1つは一定である．この章ではGauss 曲率一定，または平均曲率一定の条件をはずして，表題の完備曲面を研究し，Willmore の予想に関連して回転トーラスの特徴を与えた Shiohama-Takagi の定理を解説しよう．

14.1　Willmore の予想

S を $\mathbf{R}^3$ 内の完備な曲面とし，平均曲率の2乗 H^2 の積分

$$\iint_S H^2 dA$$

を考える．この量は共形変換で不変である．

定理 14.1　S を $\mathbf{R}^3$ 内の閉曲面とする．もしも S が球面と同相であるならば，

$$\iint_S H^2 dA \geq 4\pi$$

が成り立つ．更に，等号が成り立つための必要十分条件は，S が球面であることである．

証明　κ_1, κ_2 を S の主曲率とすると，平均曲率 H と Gauss 曲率 K は $2H = \kappa_1 + \kappa_2$, $K = \kappa_1\kappa_2$ となる．よって，

$$H^2 - K = \frac{(\kappa_1 - \kappa_2)^2}{4} \geq 0,$$

$$\iint_S H^2 dA \geq \int_S K dA.$$

S が球面と同相だから，Gauss-Bonnet の定理より

$$\iint_S K dA = 4\pi$$

だから，

$$\iint_S H^2 dA \geq 4\pi$$

が成り立つ．等号が成立するための必要十分条件は，S の各点で $\kappa_1 = \kappa_2$ が成り立つことである．従って，S は球面である．■

問 14.2　上の定理は S が球面と同相であるという仮定なしでも成り立つことを証明せよ．

例 14.3　回転トーラス

$$T^2(a,b) : \mathbf{x}(u, v) = ((a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v, b\sin u)$$
$$(a > b > 0,\ 0 < u < 2\pi,\ 0 < v < 2\pi)$$

に関して，主曲率

$$\kappa_1 = \frac{\cos u}{a + b\cos u}, \qquad \kappa_2 = \frac{1}{b}$$

だから，

$$K = \frac{\cos u}{b(a + b\cos u)}, \qquad 2H = \frac{\cos u}{a + b\cos u} + \frac{1}{b}.$$

故に，Gauss 曲率 K と平均曲率 H はともに一定でない．しかし，主曲率の 1 つは一定である．回転トーラスに対して，積分 $\displaystyle\iint_{T^2(a,b)} H^2 dA$ を計算する．

$$4(H^2 - K) = (\kappa_1 - \kappa_2)^2 = \frac{a^2}{b^2(a + b\cos u)^2}$$

より，

$$\iint_{T^2(a,b)} 4(H^2 - K) dA = \frac{a^2}{b}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b\cos u}\, du dv$$
$$= 4\pi^2 \frac{a^2}{b\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

回転トーラスは種数が 1 の閉曲面だから，Gauss-Bonnet の定理より，

$$\iint_{T^2(a,b)} KdA = 0.$$

従って

$$\iint_{T^2(a,b)} H^2 dA = \pi^2 \frac{a^2}{b\sqrt{a^2 - b^2}} \geq 2\pi^2.$$

回転トーラスの一般化として，Willmore は次のことを予想した．

予想 14. 4 (Willmore の予想) S を $\mathbf{R}^3$ 内の閉曲面とする．もしも S の種数が 1 ならば，

$$\iint_S H^2 dA \geq 2\pi^2$$

が成り立つ．更に，等号成立の必要十分条件は S が回転トーラス $T^2(\sqrt{2}\,b,\, b)$ であることである．

回転トーラスの性質より，Shiohama-Takagi は一般的な曲面を研究し回転トーラスの 1 つの特徴づけを与えた．それにより，Willmore の予想を部分的に解決した．それを次の節で議論する．一般的な場合について，Willmore の予想はまだ未解決である．

14. 2 Shiohama-Takagi の定理

この節で主曲率の 1 つが一定な完備曲面を議論する．次の Shiohama-Takagi の定理を証明する．

定理 14. 5 (Shiohama-Takagi の定理) S を $\mathbf{R}^3$ 内の種数が 1 の閉曲面とする．もしも S の主曲率の 1 つが一定ならば，

$$\iint_S H^2 dA \geq 2\pi^2$$

が成り立つ．更に，等号成立の必要十分条件は S が回転トーラス $T^2(\sqrt{2}b,\, b)$ であることである．

以降は S を主曲率の 1 つが一定となる完備な曲面と仮定する．$\mathbf{x} : U \to \mathbf{R}^3$ を曲面 S の正則表示とする．$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ を直交する単位接ベクトルとし，$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}$ を単位法線ベクトルとする．

$$d\mathbf{x} = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2, \qquad d\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} \mathbf{e}_j, \qquad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0, \tag{14.2.1}$$

ただし，$\omega_{i3} = \sum_{j=1}^{2} h_{ij}\omega_j$ である．

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^{2} \omega_{ij} \wedge \omega_j, \qquad d\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} \tag{14.2.2}$$

が成り立つ．主曲率方向に $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ を選ぶと

$$(h_{ij}) = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}$$

とすることができる．臍点でない点 p の近傍 V で，$\kappa_1 > \kappa_2$ を仮定することができる．次に $\kappa_1 = R > \kappa_2$ とする．従って

$$\omega_{13} = R\omega_1, \qquad \omega_{23} = \kappa_2\omega_2. \tag{14.2.3}$$

補題 14.6　近傍 V で $\kappa_1 = R > \kappa_2$ を仮定する．このとき

$$\omega_1 = du, \qquad \omega_{12} = f\omega_2$$

を満たす関数 u, f が存在し，

$$\kappa_2 = \frac{R(a\cos Ru + b\sin Ru)}{a\cos Ru + b\sin Ru + \dfrac{1}{R}}, \tag{14.2.4}$$

$$f = \frac{R(-a\sin Ru + b\cos Ru)}{a\cos Ru + b\sin Ru + \dfrac{1}{R}} \tag{14.2.5}$$

となる．

証明　(14.2.3) を外微分すると，(14.2.2) より

$$Rd\omega_1 = R\omega_{12} \wedge \omega_2 = \kappa_2\omega_{12} \wedge \omega_2$$

を得る．$R > \kappa_2$ より $\omega_{12} \wedge \omega_2 = 0$, $d\omega_1 = 0$ が成り立つ．よって，

$$\omega_1 = du, \qquad \omega_{12} = f\omega_2$$

を満たす関数 u, f が存在する．$\mathbf{e}_1$ の積分曲線に沿って $\omega_{23} = \kappa_2\omega_2$ と $\omega_{12} = f\omega_2$ を外微分すると，

$$\frac{\partial \kappa_2}{\partial u} = f(R - \kappa_2), \qquad \frac{\partial f}{\partial u} = -(R\kappa_2 + f^2)$$

を得る．故に

$$(R-\kappa_2)\frac{\partial^2\kappa_2}{\partial u^2}+2\Big(\frac{\partial\kappa_2}{\partial u}\Big)^2+R\kappa_2(R-\kappa_2)^2=0,$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial u^2}+R^2\phi-R=0$$

が成立する．ここで $\phi=\dfrac{1}{R-\kappa_2}$ である．上の微分方程式を解いて，

$$\kappa_2=\frac{R(a\cos Ru+b\sin Ru)}{a\cos Ru+b\sin Ru+\dfrac{1}{R}},$$

$$f=\frac{R(-a\sin Ru+b\cos Ru)}{a\cos Ru+b\sin Ru+\dfrac{1}{R}}$$

となる． ∎

補題 14.7 近傍 V で $\kappa_1=R>\kappa_2$ を仮定する．このとき，$\mathbf{e}_1$ の積分曲線 γ は S の測地線である．更に，γ は半径 $\dfrac{1}{R}$ の円の一部分である．

証明 $\omega_{12}=f\omega_2$ より，$\mathbf{e}_1$ の積分曲線 γ に沿って $\nabla_{\mathbf{e}_1}\mathbf{e}_1=\omega_{12}(\mathbf{e}_1)\,\mathbf{e}_2=0$. γ は測地線である．更に，

$$d\mathbf{x}=\mathbf{e}_1du,$$
$$d\mathbf{e}_1=R\mathbf{e}_3du,$$
$$d\mathbf{e}_2=0,$$
$$d\mathbf{e}_3=-R\mathbf{e}_1du$$

より，γ は半径 $\dfrac{1}{R}$ の円の一部分である． ∎

点 p が S の臍点でないとする．V_0 を S の臍点でない点全体の集合とし，V を点 p を含む V_0 の連結成分とする．

補題 14.8 V で $\kappa_1=R>\kappa_2$ を仮定する．このとき，点 $p\in V$ を通る $\mathbf{e}_1$ の積分曲線 γ_p は S の閉測地線で，γ_p の像は半径 $\dfrac{1}{R}$ の円である．このとき，γ_p 上で臍点が存在しない．

証明 補題 14.7 より，γ_p は S の測地線である．S の完備性により，γ_p 上の任意の収束する点列 $\{\gamma_p(u_n)\}$(その極限は q とする) に対して，(14.2.4) より

$$R - \kappa_2(\gamma_p(u)) = \frac{1}{a\cos Ru + b\sin Ru + \dfrac{1}{R}},$$

かつ γ_p に沿って a, b が一定である．従って，

$$R - \kappa_2(q) \neq 0.$$

すなわち q は臍点でない．よって，γ_p は S の臍点を持たない閉じている測地線である．つまり半径 $\dfrac{1}{R}$ の円である．■

命題 14.9　S は S 上至るところで $\kappa_1 = R \geq \kappa_2$ を満たす完備曲面とする．もしも S 上に臍点が存在すれば，S は半径 $\dfrac{1}{R}$ の球面である．

証明　もしも S 上に臍点でない点 p が存在すれば，V が空でない開集合である．任意の点 $q \in V$ に対して，補題 14.8 より $q \in V$ を通る $\mathbf{e}_1$ の積分曲線 γ_q は V に含まれる半径 $\dfrac{1}{R}$ の円である．$p_n \in V$ を $\lim_{n\to\infty} p_n = p_0 \in S$ となるような点列とし，$\gamma_n = \gamma_{p_n}$ とおく．

S の完備性により，$\{\gamma_n\}$ の部分列 $\{\gamma_k\}$ で点 p_0 を通る長さ $\dfrac{2\pi}{R}$ の単純閉測地線 γ_0 に収束するものが存在する．(14.2.4) より，$\kappa_2(q_n) = 0$ となる γ_n 上の点 q_n が存在する．γ_0 上の点 q_0 を $\{q_n\}$ の収束する部分列の極限とすると，$\kappa_2(q_0) = 0$ が成り立つ．よって q_0 が V に含まれる．補題 14.8 より，γ_0 が V に含まれる．特に p_0 が V に含まれる．従って V は閉集合である．故に $V = S$ となって，S 上に臍点は存在しない．特に，S が臍点を持てば S は全臍的である．つまり S は半径 $\dfrac{1}{R}$ の球面である．■

注意 14.10　$\mathbf{R}^3$ 内の完備曲面 S 上の主曲率の 1 つが一定という条件下に，2 つの主曲率 κ_1, κ_2 の間に大小関係 $\kappa_1 \geq \kappa_2$ を仮定することは危険がともなう．実際に，1 変数関数の例で図 [Figure 14.2] のように κ_1, κ_2 が与えられている

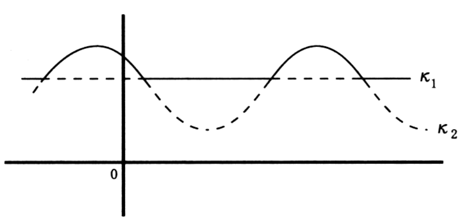


Figure 14.2

るとき，大小関係を設定すると，定数関数は消えてしまう．命題 14.9 の本質的

な点は，主曲率の 1 つが一定の完備曲面上では臍点が全く存在しない (従って $\kappa_1 > \kappa_2$ が S 上至るところで成立する) か，または S が全臍的 ($\kappa_1 \equiv \kappa_2$) となることを主張している．

命題 14. 11 S を $\mathbf{R}^3$ 内の $\kappa_1 = R \geq \kappa_2$ を満たす完備曲面とする．もしも κ_2 の符号が S 上で一定ならば，S は半径 $\dfrac{1}{R}$ の球面 $S^2(R)$ であるか，または正円柱 (right circular cylinder) $S^1(R) \times \mathbf{R}$ である．

証明 命題 14.9 より，もしも S 上に臍点が存在すれば，S は半径 $\dfrac{1}{R}$ の球面である．従って，S 上に臍点でない点が存在すれば，S 上の全ての点が非臍点となる．このとき，任意の点 $p \in S$ に対して，$\mathbf{e}_1$ の積分曲線 γ_p は半径 $\dfrac{1}{R}$ の円である．(14.2.4) より γ_p に沿って

$$\kappa_2 = \frac{R\sqrt{a^2+b^2}\,\sin(Ru+\theta)}{R\sqrt{a^2+b^2}\,\sin(Ru+\theta)+\dfrac{1}{R}},$$

ただし，$\sin\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ である．もしも $a^2+b^2 \neq 0$ ならば，u が任意の実数だから，κ_2 の符号は変わる．従って $a = b = 0$ が成り立つ．故に $\kappa_2 \equiv 0$, $f \equiv 0$. S は正円柱 $S^1(R) \times \mathbf{R}$ である． ∎

注意 14. 12 完備曲面 S の主曲率の 1 つが一定 $R > 0$ であれば，S は全臍的であるか，そうでなければ S 上に臍点は存在しないことが上述の命題 14.9, 14.11 によって示された．S が臍点を持たないとき，S の各点を通り半径 $\dfrac{1}{R}$ の円が S 上に存在する．このとき S を管曲面という (問 4.36).

命題 14. 13 S を $\mathbf{R}^3$ 内の完備曲面で S の主曲率の 1 つが一定 $R > 0$ であるとする．このとき，S は半径 $\dfrac{1}{R}$ の球面 $S^2(R)$ か，または半径 $\dfrac{1}{R}$ の円で生成された管曲面である．

証明 S 上に臍点が存在しないと仮定してよい．このとき，S に対応する多様体 M は $S^1 \times S^1$(S がコンパクトのとき) または $S^1 \times \mathbf{R}$(S が非コンパクトのとき) に微分同相となる．S の正則表示 $\mathbf{x} : U \to \mathbf{R}^3$ で曲率線を座標曲線とするものが存在する (定理 4.25)．ここで $\kappa_1 = R > \kappa_2$ と仮定してよい．写像 $\varphi : U \to \mathbf{R}^3$ を

$$\varphi(p) = \mathbf{x}(p) + \frac{1}{R}\mathbf{e}_3 \qquad ((u,v) \in U)$$

と定義する．(14.2.1) より

$$d\varphi = d\mathbf{x} + \frac{1}{R}d\mathbf{e}_3 = \left(1 - \frac{\kappa_2}{R}\right)\mathbf{e}_2\omega_2$$

となって，φ は半径 $\dfrac{1}{R}$ の円 (曲率線) の中心の軌跡である．S 上に臍点が存在しないから，φ は正則曲線である．この曲線の孤長を $v \in \mathbf{R}$ とおいて，φ の Frenet 標構 $(\varphi(v), \xi_1(v), \xi_2(v), \xi_3(v))$ は

$$\begin{cases} d\varphi = \xi_1 dv, \\ d\xi_1 = \kappa\xi_2 dv, \\ d\xi_2 = -\kappa\xi_1 dv + \tau\xi_3 dv, \\ d\xi_3 = -\tau\xi_2 dv \end{cases} \tag{14.2.6}$$

となる．主曲率 R に対する主曲率方向ベクトル $\mathbf{e}_1$ と S の単位法線ベクトル $\mathbf{e}_3$ はともに $\xi_1 = \mathbf{e}_2$ に垂直だから，S 上の点 $\mathbf{x}(u, v)$ は $\varphi(v)$ を中心とした半径 $\dfrac{1}{R}$ の円周上にある．よって S は管曲面であって，

$$\mathbf{x}(u, v) = \varphi(v) + \frac{1}{R}(\xi_2 \cos u + \xi_3 \sin u) \tag{14.2.7}$$

と表せる．∎

定理 14.5 の証明　S がコンパクトと仮定すると $\varphi(v)$ は閉曲線となる．φ の長さを ℓ とおく．(14.2.7) より，S の正規直交標構と $\varphi(v)$ の Frenet 標構の関係は以下で与えられる．

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= -\xi_2 \sin u + \xi_3 \cos u, \\ \mathbf{e}_2 &= \xi_1, \\ \mathbf{e}_3 &= -\xi_2 \cos u - \xi_3 \sin u, \\ \omega_1 &= \frac{1}{R}(du + \tau dv), \qquad \omega_2 = \left(1 - \frac{\kappa}{R}\cos u\right)dv. \end{aligned}$$

(14.2.1) と上の式より

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= \frac{R\kappa \sin u}{R - \kappa \cos u}\omega_2, \\ \omega_{13} &= R\omega_1, \\ \omega_{23} &= \frac{-R\kappa \cos u}{R - \kappa \cos u}\omega_2 \end{aligned}$$

を得る．(14.2.3) より，

$$\kappa_2 = \frac{-R\kappa\cos u}{R - \kappa\cos u}$$

となる．従って

$$4(H^2 - K) = (\kappa_1 - \kappa_2)^2 = \frac{R^4}{(R - \kappa\cos u)^2}$$

が成り立つ．S の種数は 1 だから，Gauss-Bonnet の定理より，

$$\iint_S K dA = 0$$

になる．

$$dA = \omega_1 \wedge \omega_2 = \frac{R - \kappa\cos u}{R^2}\, du \wedge dv$$

より，

$$4\iint_S H^2 dA = \int_S 4(H^2 - K) dA = \int_0^\ell \left(\int_0^{2\pi} \frac{R^2}{R - \kappa\cos u}\, du\right) dv$$

を得る．κ は $|\kappa| < R$ を満たす v のみの関数だから，

$$\iint_S H^2 dA = \frac{\pi R^2}{2} \int_0^\ell \frac{dv}{\sqrt{R^2 - \kappa^2}}$$

が成り立つ．Schwarz の不等式より

$$\ell^2 \le \int_0^\ell \frac{dv}{\sqrt{R^2 - \kappa^2}} \int_0^\ell \sqrt{R^2 - \kappa^2}\, dv,$$

$$\left(\int_0^\ell \sqrt{R^2 - \kappa^2}\, dv\right)^2 \le R^2\ell^2 - \ell \int_0^\ell \kappa^2 dv,$$

$$\left(\int_0^\ell |\kappa| dv\right)^2 \le \ell \int_0^\ell \kappa^2 dv$$

が成り立つ．Fenchel の定理より，

$$\int_0^\ell |\kappa| dv \ge 2\pi$$

だから，

$$\iint_S H^2 dA \ge \frac{\pi R^2 \ell^2}{2\sqrt{R^2\ell^2 - 4\pi^2}}$$

を得る．等号成立の必要十分条件は $\varphi(v)$ が半径 $\dfrac{\ell}{2\pi}$ の円であることである．このとき，S は回転トーラス $T\left(\dfrac{\ell}{2\pi}, \dfrac{1}{R}\right)$ である．

$$\frac{\pi R^2 \ell^2}{2\sqrt{R^2\ell^2 - 4\pi^2}} \ge 2\pi^2$$

が成り立つ．更に，等号が成り立つための必要十分条件は $R\ell = 2\sqrt{2}\,\pi$ となることである． ■

問 14.14　Klein の壷も開 Möbius 帯も完備曲面として 2 つの主曲率のうちの 1 つが一定となるように $\mathbf{R}^3$ 内にはめ込むことはできないことを証明せよ．

第15章　Appendix I：曲線の長さと微分可能性について

曲線 $\mathbf{x} : \mathbf{I} \to \mathbf{R}^n$ の像を $\mathcal{C} := \mathbf{x}(\mathbf{I})$ とおく．$\mathcal{C}$ または $\mathbf{x}$ を曲線と呼ぶ．$\mathbf{x}$ が長さを持つための必要十分条件はその成分関数が有界変動関数であることについて解説する．

15.1　曲線の長さ

まず，曲線 $\mathcal{C} := \mathbf{x}(\mathbf{I})$ の長さ $L(\mathbf{x})$ について議論する．区間 $\mathbf{I} = [a,\, b]$ で定義された連続なベクトル値関数 $\mathbf{x} : \mathbf{I} \to \mathbf{R}^n$ はいかなる条件下で長さを定義できるか？　$\mathbf{R}^n$ の距離を用いて曲線の長さを定義しよう．$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ を $\mathbf{R}^n$ の自然な基底とし，$\mathbf{x}(t) := \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x^i(t)\mathbf{e}_i$ と表す．区間 $\mathbf{I} = [a,\, b]$ の分割 Δ を

$$\Delta\colon a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b, \qquad |\Delta| := \sup_{1 \le i \le N} |t_i - t_{i-1}|$$

とおく．分割の各点を次々と線分で結んでできる折れ線を Γ_Δ とする．このとき，折れ線の長さ $L(\Gamma_\Delta)$ は以下で与えられる：

$$L(\Gamma_\Delta) = \sum_{i=1}^{N} \|\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}(t_{i-1})\|.$$

定義 15.1 (曲線の長さ)

(i)　関数 $\mathbf{x} : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ の分割 Δ に関する**変動** $V_\Delta(\mathbf{x})$ と $\mathbf{x}$ の**全変動** $V(\mathbf{x})$ を以下で定義する：

$$V_\Delta(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^{N} \|\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}(t_{i-1})\|, \qquad V(\mathbf{x}) := \sup_{\Delta} V_\Delta(\mathbf{x}).$$

ここに，上極限は $\mathbf{I}$ の全ての分割にわたる上限である．

(ii)　$\mathbf{x} : \mathbf{I} \to \mathbf{R}^n$ が**求長可能** (rectifiable) であるとは，

$$L(\mathbf{x}) = \sup_{\Delta} L(\Gamma_\Delta) < \infty.$$

この極限値を $\mathbf{x}$ の**長さ**と定義する．

定理 15.2　ベクトル値関数 $\mathbf{x} : \mathbf{I} \to \mathbf{R}^n$ が求長可能 (rectifiable) であるための必要十分条件は，$\mathbf{x}$ の各成分 $x_k : \mathbf{I} \to \mathbf{R}\,(k = 1, \cdots, n)$ が有界変動であることである．

証明　$\mathcal{C} = \mathbf{x}(\mathbf{I})$ が求長可能と仮定する．$\mathbf{I}$ の分割 Δ に関する折れ線 Γ_Δ の各線分の長さは

$$\|\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}(t_{i-1})\| = \left(\sum_{k=1}^{n}(x_k(t_i) - x_k(t_{i-1}))^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

ここで $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbf{R}$ に対する自明な不等式

$$|\alpha_1|, \cdots, |\alpha_n| \leq (\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2)^{\frac{1}{2}} \leq |a_1| + \cdots + |\alpha_n|$$

を用いる．上式から

$$L(\Gamma_\Delta) = \sum_{i=1}^{N} \|\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}(t_{i-1})\| \leq \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{N} |x_k(t_i) - x_k(t_{i-1})|,$$

かつ

$$L(\Gamma_\Delta) \geq \sum_{i=1}^{N} |x_k(t_i) - x_k(t_{i-1})| \qquad (k = 1, \cdots, n).$$

故に，各 $k = 1, \cdots, n$ に対して

$$V_\Delta(x_k) \leq L(\Gamma_\Delta) \leq \sum_{k=1}^{n} V_\Delta(x_k).$$

従って Δ は任意の分割だから，$x_k : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ は有界変動である．十分性は自明である．∎

注意 15.3　$\mathbf{x} : \mathbf{I} \to \mathbf{R}^n$ が連続でなくても，各 $x_k : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ が有界変動ならば求長可能となる．

15.2 有界変動関数の微分可能性

例 15.4

(i) 単調関数 $f: \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ は有界変動で，$V(f) = |f(a) - f(b)|$ である．

(ii) $\mathbf{I}$ の分割 Δ: $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b\,(i = 1, 2, \cdots, n)$ に対して $f|_{[t_{i-1}, t_i]}$ が単調ならば，f は有界変動で $V(f) = \sum_{i=1}^{n} |f(t_{i-1}) - f(t_i)|$ である．

(iii) $\mathbf{I} = [0, 1]$ 上の関数 f を以下で定義する：

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ が有理数}, \\ 0 & x \text{ が無理数}. \end{cases}$$

$\mathbf{I}$ の分割 Δ: $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{2n} = 1$ を t_{2i-1} は無理数，t_{2i} は有理数に選ぶと，$V_\Delta(f) = 2n$ だから $V(f) = \infty$. 従って f は有界であっても有界変動でない．

(iv) 平面の x 軸上に区間 $\mathbf{I}$: $[0, 1]$ をとる．$\mathbf{I}$ 上の点列を $\left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n = 1, 2, \cdots \right\}$ とする．区間 $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right] \subset \mathbf{I}$ を底辺とする高さ $\frac{1}{n}$ の 2 等辺三角形を平面の第 1 象限内に描いて $f: \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ のグラフを構成する．このとき，$f(0) = f\left(\frac{1}{n}\right) = 0\,(n = 1, 2, \cdots)$ で f は連続である．$\mathbf{I}$ の分割 Δ の分点を $\frac{1}{n}$ と $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right]$ の中点を加えたものとすると，

$$V_\Delta(f) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

となって f は非有界変動である．

(v) 絶対連続関数は有界変動である．特に，Lipschitz 連続関数は有界変動である．

連続関数の全変動は必ずしも有界ではない．以下の命題が定義から直接解る．

(i) $f: \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ が有界変動ならば，f は $\mathbf{I}$ 上で有界である．

(ii) $f: \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ が有界変動ならば，$\mathbf{I}$ の任意の部分区間 $\mathbf{I}'$ 上で $f|_{\mathbf{I}'}$ は有界変動である．

次に関数の変動を正の部分と負の部分に分解しよう．最も単純な例から始める．

$f(x) = x\,(x \in \mathbf{R})$ について以下を定義する：

$$x^+ := \max\{x, 0\}, \qquad x^- := \max\{-x, 0\}.$$

このとき，$|x| = x^+ + x^-$, $x = x^+ - x^-$ だから

$$x^+ = \frac{x+|x|}{2}, \qquad x^- = \frac{|x|-x}{2}$$

を得る．この考えを一般の関数 $f : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ に適用しよう．

$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\}, \qquad f^-(x) := \max\{-f(x), 0\}$$

とおいて，f^+, f^- をそれぞれ f の**正の部分**，**負の部分**という．このとき，

$$\begin{aligned} &f^+(x) \geq 0, \qquad f^-(x) \geq 0, \\ &f^+(x) + f^-(x) = |f(x)|, \qquad f^+(x) - f^-(x) = f(x), \\ &f^+(x) = \frac{f(x)+|f(x)|}{2}, \qquad f^-(x) = \frac{|f(x)|-f(x)}{2} \end{aligned}$$

が成立する．区間 $\mathbf{I}$ の分割に対しても同様に考えて，

定義 15.5　Δ: $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ を $\mathbf{I}$ の分割とする．$V_\Delta(f)$ の正，負の部分を

$$P_\Delta := \sum_{i=1}^{n} \{f(x_i) - f(x_{i-1})\}^+, \qquad N_\Delta := \sum_{i=1}^{n} \{f(x_i) - f(x_{i-1})\}^- \tag{15.2.1}$$

と定義する．このとき，$P_\Delta \geq 0$, $N_\Delta \geq 0$ かつ以下が成り立つ：

$$P_\Delta + N_\Delta = V_\Delta(f), \qquad P_\Delta - N_\Delta = f(b) - f(a). \tag{15.2.2}$$

更に，$V(f)$ の正の部分と負の部分をそれぞれ以下のように定義する：

$$P := \sup_\Delta P_\Delta, \qquad N := \sup_\Delta N_\Delta. \tag{15.2.3}$$

$V(f)$ を f の**全変動** (total variation)，P を**正変動** (positive variation)，N を**負変動** (negative variation) という．

補題 15.6　$f : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ の全変動とその正変動，負変動のうちどれか 1 つが有界ならば，他の全てが有界であって，

$$P + N = V, \qquad P - N = f(b) - f(a)$$

が成立する．

証明　初めの主張は関係式 (15.2.2) からただちに従う．

$P + N = V(f)$ を示すために，$\mathbf{I}$ の分割の列 $\{\Delta_n\}$ で

$$\lim_{n\to\infty} V_{\Delta_n}(f) = V(f)$$

を満たすものをとる．このとき，(15.2.3) より

$$P + N \geq P_{\Delta_n}(f) + N_{\Delta_n}(f) = V_{\Delta_n}(f) \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

だから，$n \to \infty$ として $P + N \geq V(f)$ が証明された．

次に，別の分割の列 $\{\Delta_n\}$ で

$$\lim_{n\to\infty} P_{\Delta_n} = P$$

を満たすものを選ぶ．このとき，

$$P_{\Delta_n} + N_{\Delta_n} = V_{\Delta_n}(f) \leq V(f)$$

だから，$n \to \infty$ として $P + N \leq V(f)$ が証明された． ∎

区間 $\mathbf{I}$ の分割 Δ に対し，新しい分点を追加して構成した分割 Δ_1 を Δ の細分という．Δ の任意の分点が Δ_1 の分点であるとき，Δ_1 は Δ の細分である．

補題 15.7　$\mathbf{I}$ の 2 つの分割 Δ, Δ_1 で，もしも Δ_1 が Δ の細分ならば

$$V_{\Delta_1}(f) \geq V_{\Delta}(f)$$

が成立する．

証明　Δ: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ の細分 Δ_1 が Δ に 1 点を加えた場合について証明すれば十分である．新しい分点を $c \in (x_{i-1}, x_i)$ とすると，$\Delta_1 = \Delta \cup \{c\}$ だから

$$\begin{aligned} &V_{\Delta_1}(f) - V_{\Delta}(f) \\ &\quad = |f(x_{i-1}) - f(c)| + |f(c) - f(x_i)| - |f(x_{i-1}) - f(x_i)| \geq 0. \end{aligned}$$

∎

命題 15.8　$V(f) < \infty$ のとき，任意の $c \in (a, b)$ に対して

$$V(f) = V(f|_{[a,c]}) + V(f|_{[c,b]})$$

が成立する．すなわち，全変動は区間に関して加法的である．

証明　$\{\Gamma'_n\}, \{\Gamma''_n\}$ をそれぞれ $[a, c], [c, b]$ の分割の列で，

$$\lim_{n\to\infty} V_{\Gamma'_n}(a, c) = V(f|_{[a,c]}), \qquad \lim_{n\to\infty} V_{\Gamma''_n}(c, b) = V(f|_{[c,b]})$$

を満たすものとする．この分割の和 $\Gamma_n := \Gamma'_n + \Gamma''_n$ を $[a, b]$ の分割とみなして：

$$V(f) \geq V_{\Gamma_n} = V_{\Gamma'_n}(f|_{[a,c]}) + V_{\Gamma''_n}(f|_{[c,b]})$$

が各々の $n=1, 2, \cdots$ に対して成り立つ．ここで $n\to\infty$ とすると

$$V(f) \geq V(f|_{[a,c]}) + V(f|_{[c,b]})$$

を得る．

次に，$\{\Gamma_n\}$ を $[a, b]$ の分割の列で $\lim_{n\to\infty} V_{\Gamma_n}(f) = V(f)$ かつ c は Γ_n の分点とする．このとき，Γ_n を $[a, c]$ の分割 Γ'_n と $[c, b]$ の分割 Γ''_n の和 $\Gamma_n = \Gamma'_n + \Gamma''_n$ と考えると，各々の $n = 1, 2, \cdots$ に対して

$$V_{\Gamma_n}(f) = V_{\Gamma'_n}(f|_{[a,c]}) + V_{\Gamma''_n}(f|_{[c,b]}) \leq V(f|_{[a,c]}) + V(f|_{[c,b]})$$

を得る．ここで，$n\to\infty$ としたとき，$V(f) \leq V(f|_{[a,c]}) + V(f|_{[c,b]})$ となる．

∎

補題 15.6 によって

$$P = \frac{1}{2}\Big\{V(f) + (f(b) - f(a))\Big\}, \qquad N = \frac{1}{2}\Big\{V(f) - (f(b) - f(a))\Big\}$$

である．$V(f) < \infty$ のとき，$V(f)$ と定数値関数 $f(b) - f(a)$ の全変動はともに区間に関して加法的だから，P と N はともに区間に関して加法的である．

さて，$f : \mathbf{I} \to \mathbf{R}, \mathbf{I} := [a, b]$ は有界変動関数とし，$V, P, N : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ を $a < x < b$ に対して

$$V(x) := V(f|_{[a,x]}), \qquad P(x) := P(f|_{[a,x]}), \qquad N(x) := N(f|_{[a,x]}) \tag{15.2.4}$$

によって定義すると，V, P, N は命題 15.8 によって加法的だから単調増加関数である．

定理 15. 9 (Jordan の分解定理)　$f : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ が有界変動関数であるための必要十分条件は f が 2 つの単調増大関数の差で表せることである．

証明　(必要性の証明)　f は有界変動を仮定する．$a < x < b$ に対して $P(x) - N(x) = f(x) - f(a)$ が成立し，従って $f(x) = [P(x) + f(a)] - N(x)$ となって，f は単調増大関数の差で表せた．

(十分性の証明)　$g, h : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ を単調増大関数として

$$f(x) = g(x) - h(x) \qquad (x \in [a, b])$$

と書けたとしよう．$\mathbf{I}$ の分割 Δ: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ と分割の各番号 $i = 1, 2, \cdots, n$ に対して

$$|f(x_i) - f(x_{i-1})| = \Big|[g(x_i) - g(x_{i-1})] - [h(x_i) - h(x_{i-1})]\Big|$$

が成立する．従って

$$|f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq |g(x_i) - g(x_{i-1})| + |h(x_i) - h(x_{i-1})|.$$

この式を $i = 1, 2, \cdots, n$ について加えると

$$V_\Delta(f) \leq V_\Delta(g) + V_\Delta(h)$$

が任意の分割 Δ に対して成立する．故に

$$V(f) \leq V(g) + V(h).$$

ところが，g, h に対する仮定から上式の右辺は有界である． ∎

定義 15. 10 $f : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ が $x_0 \in (a, b)$ において不連続で，更に

$$f(x_0 + 0) := \lim_{x \downarrow x_0} f(x), \qquad f(x_0 - 0) := \lim_{x \uparrow x_0} f(x)$$

が存在してともに有界のとき，x_0 を f **の第 1 種の不連続点** (discontinuity point of the first kind) という．

$x_0 \in \mathbf{I}$ が f の不連続点のとき，x_0 の近傍で f の挙動について以下の場合が考えられる：

(i) $f(x_0 + 0)$ と $f(x_0 - 0)$ がともに存在する．

(ii) $\lim_{x \downarrow x_0} |f(x)| = \infty$ または $\lim_{x \uparrow x_0} |f(x)| = \infty$.

(iii) x_0 の近傍で f が振動して一定の極限を持たない．

(iv) f は振動しつつ ∞ に発散する．

(i) で $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) \neq f(x_0)$ の場合，x_0 は除去可能な不連続点という．このとき，$f(x_0) := f(x_0 + 0)$ と定義しなおせば，f は x_0 で連続になる．

(i) で $f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0)$ の場合，f は x_0 において**不連続的跳び** (jump discontinuity) を持つという．このとき

$$d(x_0) := |f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)|$$

を x_0 における**跳び**という [Figure 15.2].

定理 15. 11 有界変動関数 $f : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ は高々可算個の不連続点を持ち，各々の不連続点は第 1 種不連続点である．

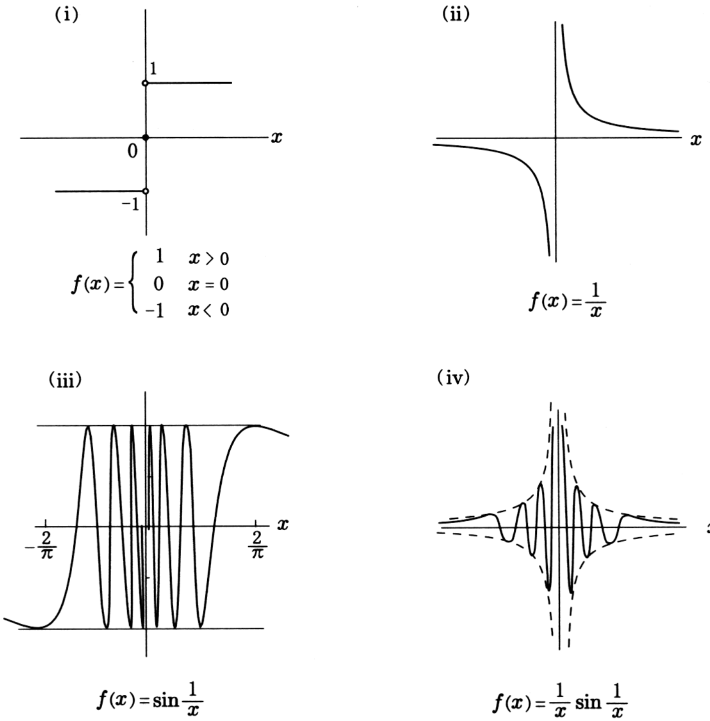


Figure 15.2

証明　Jordan の分解定理 15.9 によって f は 2 つの単調増大関数の差で書ける．従って単調な関数 f について証明すれば十分である．

単調関数 $f: \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ の不連続点 x_0 が第 1 種不連続点でないと仮定する．このとき，$\lim_{x \downarrow x_0} |f(x)| = \infty$ または $\lim_{x \uparrow x_0} |f(x)| = \infty$ が成り立つ．すなわち，x_0 に収束する点列 $\{x_n\}$ で，任意の $M > 0$ に対して番号 N が存在して

$$|f(x_n)| > M \qquad (n > N)$$

を満たすものが存在する．いずれの場合も $V(f) = \infty$ となって，これは f が有界変動であるとの仮定に矛盾する．

従って f の各々の不連続点 x_0 は第 1 種不連続点で，x_0 での跳び $d(x_0)$ の総和は $V(f) = |f(b) - f(a)|$ を超えない．故に不連続点の集合は高々可算個である．

∎

注意 15.12　全変動 $V(f)$ の定義は

$$V(f) = \sup_{\Delta} V_\Delta(f)$$

であった．しかし

$$V(f) = \lim_{|\Delta|\to 0} V_\Delta(f)$$

は必ずしも成立しない．実際に，簡単な例をあげよう．

$a < c < b$ として，$f : [a, b] \to \mathbf{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq c, \\ 1 & x = c \end{cases}$$

と定義すると，$V(f) = 2$ である．しかし分割 Δ: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ を c が分点に含まれないように選べば，$V_\Delta(f) = 0$ だから $\lim_{|\Delta|\to 0} V_\Delta(f) = 0$ を得る．

定理 15.13　$f : \mathbf{I} \to \mathbf{R}^n$ が連続であれば

$$\lim_{|\Delta|\to 0} V_\Delta(f) = \sup_{\Delta} V_\Delta(f) = V(f)$$

が成立する．しかし，f が不連続のときにはこの関係は成立しない．

証明　$V_\Delta(f) \leq V(f)$ が任意の分割 Δ に対して成立する．任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して $|\Delta| < \delta$ を満たす任意の分割に対し $V_\Delta(f) \geq V(f) - \varepsilon$ を示せば証明は終わり．

$\varepsilon > 0$ を任意に固定して分割 $\overline{\Delta}$: $a = \overline{x}_0 < \overline{x}_1 < \cdots < \overline{x}_k = b$ を $V_{\overline{\Delta}}(f) \geq V(f) - \dfrac{\varepsilon}{2}$ を満たすものとせよ．f は $\mathbf{I}$ 上で一様連続だから，以下の条件を満たす $\delta > 0$ が存在する：

(i)　$|f(x) - f(x')| < \dfrac{\varepsilon}{4k}, \qquad |x - x'| < \delta.$

(ii)　$\delta < \min_{1 \leq j \leq k} (\overline{x}_j - \overline{x}_{j-1}).$

ここで $|\Delta| < \delta$ を満たす任意の分割 Δ: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ に対して $V_\Delta(f) \geq V(f) - \varepsilon$ が成立することを示そう．

$\Delta_1 := \Delta \cup \overline{\Delta}$ は Δ と $\overline{\Delta}$ の細分で，Δ に k 個の分点 $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \cdots, \overline{x}_k$ を加えたものとする．$V_\Delta(f)$ と $V_{\Delta_1}(f)$ との相違は，追加した分点を内部に含む Δ_1 の部分区間において生ずる．$\overline{x}_j$ を内点に含む Δ_1 の部分区間を (もしも存在すれば) $\overline{x}_j \in (x_{i(j)-1}, x_i(j))$ とおく．更に，

$$V_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \Sigma^1 + \Sigma^2,$$
$$\Sigma^1 := \sum_{j=1}^{k} |f(x_{i(j)-1}) - f(x_{i(j)})|,$$
Σ^2 は残り全部

とおく．ここで，$\overline{x}_j$ を内部に含む Δ_1 の部分区間が存在しない場合には

$$|f(x_{i(j)-1}) - f(\overline{x}_j)| + |f(\overline{x}_j) - f(x_{i(j)-1})| = 0$$

と約束する．

$$\begin{aligned} V_\Delta(f) &\geq \Sigma^2 \\ &= V_{\Delta_1}(f) - \sum_{j=1}^{k}\{|f(x_{i(j)-1}) - f(\overline{x}_j)| + |f(\overline{x}_j) - f(x_{i(j)-1})|\} \end{aligned}$$

が成り立つから，故に

$$\begin{aligned} V_\Delta(f) \geq V_{\Delta_1}(f) - \frac{\varepsilon}{2} &\geq V_{\overline{\Delta}}(f) - \frac{\varepsilon}{2} \\ &> V(f) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = V(f) - \varepsilon. \end{aligned}$$

∎

最後に，有界変動関数はほとんど至るところで微分可能であることが，以下のよく知られた定理と Jordan の分解定理から解る．証明は微分積分学の教科書に譲る．

定理 15. 14　単調増大関数はほとんど至るところで微分可能である．

系 15. 15　$f : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ が C^1-級ならば以下の関係式が成立する．

$$V(f) = \int_a^b |f'(t)|dt, \qquad P(t) = \int_a^t (f'(u))^+ du,$$
$$N(t) = \int_a^t (f'(u))^- du.$$

第16章　Appendix II：Whitneyのはめ込み定理の概説

n 次元多様体 M の $\mathbf{R}^{2n}$ へのはめ込み $\tau : M \to \mathbf{R}^m$ の構成について解説する．τ を用いた M 上の Morse exhaustion 関数の構成は Huber の定理 (11.2 節) ですでに解説した．我々の目的は **proper なはめ込みの構成**である．Exhaustion 関数 (16.1.1) を M から $\mathbf{R}^m$ への滑らかな写像 $\sigma_0 : M \to \mathbf{R}^m$ とみなし，この像の近くに ($\|\sigma_0(q) - \tau(q)\| < 1$ ($\forall q \in M$)) はめ込みを構成すれば τ は proper となる．はめ込みの構成に Sard の定理がきわめて重要であるが，証明は[14]に譲り，ここでは省略する．

16.1　1の分解と exhaustion 関数の構成

多様体 M は境界を持たない n 次元連結かつ滑らかで第 2 可算公理を満たすと約束する．M は**局所有限性を持つ可算個の開被覆** $\{U_j\}_{j=1,2,\cdots}$ を許容する．すなわち，任意の点 $x \in M$ に対して x の近傍 $U(x)$ で $U(x)$ と交わる $\{U_j\}$ の個数は有限個しかないものが存在するとき，開被覆 $\{U_j\}_{j=1,2,\cdots}$ は局所有限性を満たすという．$\{U_j\}$ を少し縮めても局所有限性を持つ M の開被覆であるという性質は保たれるだろう．M の 2 つの開被覆 $\{U_i\}, \{V_j\}$ に対して，任意の V_j がある開集合 U_i に含まれるとき $\{V_j\}$ は $\{U_i\}$ の**細分**という．実際，M の座標近傍系による開被覆を $\{(U_j, \varphi_j)\}$ とする．各々の U_j を少し縮めて，$\{W_j\}$ は $\{V_j\}$ の細分で，$\{V_j\}$ は $\{U_j\}$ の細分で，しかも以下の性質を満たすようにとれる (詳細は[14]に譲る)：

(i)　$\{W_j\}, \{V_j\}, \{U_j\}$ は全て局所有限性を持つ M の開被覆である．

(ii)　$\varphi_j(U_j) = B(O, 3), \quad \varphi_j(V_j) = B(O, 2), \quad \varphi_j(W_j) = B(O, 1)$

$$(j = 1, 2 \cdots).$$

ここに，$B(O, r)$ は $\mathbf{R}^n$ の原点 O を中心とした r-開球である．

$\mathbf{R}^n$ の原点に関して対称な滑らかな関数 $\psi : B(O, 3) \to [0, 1]$ で

$$\mathrm{supp}(\psi) \subset B(O, 2), \qquad \psi|_{B(O,1)} = 1$$

を満たすものを固定する．各々の $j = 1, \cdots$ に対して $\alpha_j : U_j \to [0, 1]$ を

$$\alpha_j(x) := \psi \circ \varphi_j(x) \qquad (x \in U_j)$$

と定義すると，

$$\alpha(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x) < \infty \qquad (x \in M)$$

は滑らかな関数となる．各々の $j = 1, \cdots$ に対して関数

$$\beta_j : M \to \mathbf{R},$$
$$\beta_j(x) := \frac{\alpha_j(x)}{\alpha(x)} \qquad (x \in M)$$

は $0 \leq \beta_j \leq 1$ かつ $\sum_j \beta_j(x) = 1\,(x \in M)$ を満たす．このとき，関数族 $\{\beta_j\}_{j=1,\cdots}$ を $\{U_j\}$ に附随した **1 の分解**という．M 上の滑らかな正値関数 $f : M \to \mathbf{R}_+$ を

$$f(x) := \sum_{j=1}^{\infty} j\psi \circ \varphi_j(x) \qquad (x \in M) \tag{16.1.1}$$

と定義する．もしも $x \in W_j$ ならば $f(x) \geq j$ となる．

定義 16.1 (Morse exhaustion 関数)　(i)　関数 $f : M \to \mathbf{R}$ は任意の定数 $c \in \mathbf{R}$ に対して $M^c(f) := f^{-1}((-\infty, c])$ がコンパクトとなるとき，**exhaustion 関数**という．

(ii)　滑らかな関数 $f : M \to \mathbf{R}$ の全ての臨界点 $p \in M$ で Hesse 行列

$$\mathrm{Hess}_f(p) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\right)$$

が非退化のとき，f を **Morse 関数**という．ここに，$\{x_1, \cdots, x_n\}$ は p のまわりの局所座標系である．

(iii)　Morse 関数 $f : M \to \mathbf{R}$ の臨界点を $p \in M$ とする．$\mathrm{Hess}_f(p)$ の負の固有値の個数を p における f の**指数**という．

例 16.2　$M := \mathbf{R}^n \setminus \{O\}$ として，$\{(U_j, \varphi_j)\}$ が上の性質を持つようにとる．

このとき，O に収束する点列を $\{x_k\}$ とすると，任意の exhaustion 関数 f に対して $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \infty$ が成り立つ．実際，十分大きな番号 N を固定したとき，$V_1^b \cup \cdots \cup V_N^b$ はコンパクトで O との距離は正だから，この集合に含まれる $\{x_k\}$ の元の個数は高々有限個である．この点列は M の点に収束する部分列を含まない．ここに，b は閉包作用素である．

補題 16.3　上述 (16.1.1) の関数 $f : M \to \mathbf{R}$ は以下の性質を持つ：

(i)　f は exhaustion 関数である．すなわち，任意の定数 c に対して $M^c(f)$ はコンパクトである．

(ii)　収束する部分列を含まない M の点列 $\{x_k\}$ に対して $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \infty$ が成立する．

証明　$V_1^b \cup \cdots \cup V_{[c]+1}^b$ は M のコンパクト集合で，f の構成方法から $M^c(f) \subset V_1^b \cup \cdots \cup V_{[c]+1}^b$ が成立する．故に $M^c(f)$ はコンパクトである．もしも，$\{x_j\}$ の部分列 $\{x_\ell\}$ で $\limsup_{\ell\to\infty} f(x_\ell) \le c$ を満たすものが存在したと仮定すると，$\{x_\ell\} \subset M^{[c]+1}(f)$ となって，$\{x_\ell\}$ は $M^{[c]+1}(f)$ 内の 1 点に収束する部分列を持つ．これは $\{x_k\}$ に対する仮定に矛盾する．∎

16.2　Sard の定理

Whitney のはめ込み定理の証明に必要な形で Sard の定理を述べる．μ を $\mathbf{R}^n$ の Lebesgue 測度とする．$x \in \mathbf{R}^n$ と $r > 0$ に対して x を中心とする辺の長さが r の立方体 $\mathcal{C}(x\,;r)$ を

$$\mathcal{C}(x\,;r) := \left\{ y \in \mathbf{R}^n \,\middle|\, |x_i - y_i| \le \frac{r}{2},\ i = 1, \cdots, n \right\}$$

と書く．このとき $\mu(\mathcal{C}(x\,;r)) = r^n$ である．

定義 16.4 (測度ゼロ集合)　(i)　$\mathbf{R}^n$ の集合 A は，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，可算個の立方体 $\{\mathcal{C}(x_i\,;r_i)\}_{i=1,\cdots}$ で以下の性質を満たすものが存在するとき，**測度ゼロ集合**という：

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{C}(x_i\,;r_i), \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\mathcal{C}(x_i\,;r_i)) < \varepsilon.$$

(ii)　滑らかな n 次元多様体 X の部分集合 S は，任意の局所座標系 (U, φ) に対して $\varphi(U \cap S)$ が測度ゼロ集合であるとき，測度ゼロ集合であるという．

定理 16.5 (Sard の定理)　X, Y は滑らかな多様体で，$f : X \to Y$ を滑らかな写像とする．

(i)　$\dim X < \dim Y$ のとき，$f(X)$ は Y の測度ゼロ集合である．

(ii)　$\dim X = \dim Y$ のとき，f の臨界点集合 $\mathrm{Crit}(f) := \{p \in X \mid df_p = 0\}$ の像 $f(\mathrm{Crit}(f))$ は Y の測度ゼロ集合である．

16.3　$m \times n$ 行列の空間

実 $m \times n$ 行列全体の集合を $\mathfrak{M}(m, n)$ とし，その中の階数 k の部分集合を $\mathfrak{M}(m, n; k)$ とおく．$m \times n$ 行列 $A \in \mathfrak{M}(m, n)$ の (i, j) 成分を a_{ij} とする．$\mathfrak{M}(m, n)$ と $\mathbf{R}^{mn}$ との自然な同一視：$A \Longleftrightarrow (a_{11}, \cdots, a_{1n}, \cdots, a_{m1}, \cdots, a_{mn})$ によって $\mathbf{R}^{mn}$ の微分構造を $\mathfrak{M}(m, n)$ に導入する．2つの正則行列 $P \in \mathfrak{M}(m, m)$ と $Q \in \mathfrak{M}(n, n)$ に対して定まる対応 $A \mapsto PAQ$ は多様体 $\mathfrak{M}(m, n)$ 上の微分同相写像を定義する．

補題 16.6　$\mathfrak{M}(m, n; k)$ は $\mathfrak{M}(m, n)$ の $k(m+n-k)$ 次元部分多様体である．

証明　任意の $M_0 \in \mathfrak{M}(m, n; k)$ に対して，$P \in \mathfrak{M}(m, m)$ と $Q \in \mathfrak{M}(n, n)$ で

$$PM_0Q = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{rank}(A_0) = k$$

を満たすものが存在する．ここで A_0, B_0, C_0, D_0 は以下である：

$$A_0 \in \mathfrak{M}(k, k; k), \qquad B_0 \in \mathfrak{M}(k, n-k),$$
$$C_0 \in \mathfrak{M}(m-k, k), \qquad D_0 \in \mathfrak{M}(m-k, n-k).$$

$\mathfrak{M}(k, k)$ 上の距離関数を以下で定義する：

$$d(A_0, A_1) := A_0 - A_1 \text{の成分の絶対値の最大値}.$$

このとき，$\det A_0 \neq 0$ だから，以下の条件を満たす $\delta > 0$ が存在する：

$$d(A_0, A_1) < \delta \quad \text{ならば} \quad \det A_1 \neq 0.$$

次に，

$$U := \left\{ M \in \mathfrak{M}(m, n) \,\middle|\, M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},\ A \in \mathfrak{M}(k, k),\ d(A_0, A) < \delta \right\}$$

とおけば，U は $\mathfrak{M}(m, n)$ における点 M_0 の近傍を定義する．ここで $B \in \mathfrak{M}(k, n-k)$, $C \in \mathfrak{M}(m-k, k)$, $D \in \mathfrak{M}(m-k, n-k)$ は任意である．さて，$M_0 \in \mathfrak{M}(m, n\,; k)$ のまわりの $\mathfrak{M}(m, n\,; k)$ における近傍を定義しよう．$B \in \mathfrak{M}(k, n-k)$, $C \in \mathfrak{M}(m-k, k)$, $D \in \mathfrak{M}(m-k, n-k)$ は任意として，

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \qquad (A \in \mathfrak{M}(k, k\,; k))$$

に対して

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ -CA^{-1} & I_{m-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -CA^{-1}B + D \end{pmatrix}$$

となる．ここに I_k は k 次単位行列を表す．両辺の階数を比べて $M \in \mathfrak{M}(m, n\,; k)$ となるための必要十分条件は $D = CA^{-1}B$ であることが解る．従って $\mathfrak{M}(m, n\,; k)$ 内での M_0 の近傍は，$B \in \mathfrak{M}(k, n-k)$, $C \in \mathfrak{M}(m-k, k)$ を任意として以下で与えられる：

$$U \cap \mathfrak{M}(m, n\,; k) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -CA^{-1}B \end{pmatrix} \,\middle|\, A \in \mathfrak{M}(k, k),\ d(A, A_0) < \delta \right\}.$$

他方，$B \in \mathfrak{M}(k, n-k)$, $C \in \mathfrak{M}(m-k, k)$ を任意として

$$\mathfrak{W}_0 := \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, A \in \mathfrak{M}(k, k) \right\}$$

は自然な同一視によって $\mathbf{R}^{k(m+n-k)}$ の微分構造を持つ．特に，

$$\mathfrak{W} := \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{W}_0 \,\middle|\, d(A, A_0) < \delta \right\}$$

は $\mathbf{R}^{k(n+m-k)}$ の開部分多様体である．写像 $\sigma : \mathfrak{W} \to U$ を

$$\sigma\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \right) := \begin{pmatrix} A & B \\ C & -CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

によって定義すると，σ は $U \cap \mathfrak{M}(m, n\,; k)$ 上で全単射となる．更に写像 $\tau : U \to \mathfrak{W}$ を

$$\tau\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & -CA^{-1}B \end{pmatrix} \right) := \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

と定義すると，これは $U \cap \mathfrak{M}(m, n\,; k)$ 上で全単射となる．すなわち，$(U \cap \mathfrak{M}(m, n\,; k), \tau)$ は点 $M_0 \in U \cap \mathfrak{M}(m, n\,; k)$ における $\mathfrak{M}(m, n\,; k)$ の局所座

標系となっている．このとき，$\mathfrak{M}(m,\, n\,;\, k)$ の次元は

$$k^2 + k(m-k) + k(n-k) = k(m+n-k)$$

である． ∎

問 16.7　$P \in \mathfrak{M}(m,\, \ell)$, $Q \in \mathfrak{M}(\ell,\, n)$ のとき，

$$\operatorname{rank} P + \operatorname{rank} Q - \ell \le \operatorname{rank} PQ \le \min\{\operatorname{rank} P,\, \operatorname{rank} Q\}$$

を示せ．

16.4　はめ込みの構成

exhaustion 関数 $f : M \to \mathbf{R}$ を (16.1.1) で定義する．m を十分大きな自然数として，f を M から $\mathbf{R}^m$ の中への滑らかな写像 $M \ni p \mapsto (0, \cdots, 0, f(p)) \in \mathbf{R}^m$ とみなす．この写像を変形して M を $\mathbf{R}^m$ の部分多様体としてはめ込む．

補題 16.8　領域 $U \subset \mathbf{R}^n$ で定義された滑らかな写像を $\sigma : U \to \mathbf{R}^m$ とする．もしも $m \ge 2n$ ならば, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して以下の条件を満たす $A \in \mathfrak{M}(m,\, n)$ が存在する：

(i)　$|a_{ij}| < \varepsilon \qquad (i = 1, \cdots, m,\ j = 1, \cdots, n)$.

(ii)　$\tau(u) := \sigma(u) + Au\ (u \in U)$ で与えられた写像 τ ははめ込みである．

証明　写像 $\rho_k : \mathfrak{M}(m,\, n\,;\, k) \times U \to \mathfrak{M}(m,\, n)$ を

$$\rho_k(M,\, u) := M - \mathfrak{J}(u) \qquad (M \in \mathfrak{M}(m,\, n\,;\, k))$$

によって定義する．ここで，$v = (v_1, \cdots, v_m)^t := \sigma(u)$, $u = (u_1, \cdots, u_n)^t$ とおいて

$$\mathfrak{J}(u) := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial v_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial v_m}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial v_m}{\partial u_n} \end{pmatrix}$$

である．このとき ρ_k は $k(n+m-k)$ 次元多様体から mn 次元多様体への滑らかな写像である．もしも $k \le n-1$ ならば $\dim \mathfrak{M}(m,\, n) - \dim \mathfrak{M}(m,\, n\,;\, k) \times U \ge 1$ となって, Sard の定理 16.5 より $k = 1, \cdots, n-1$ に対し $\rho_k(\mathfrak{M}(m,\, n\,;\, k) \times U)$ は $\mathbf{R}^{mn}$ 内の測度ゼロ集合である．従って

$$\mathbf{R}^{mn} \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} \rho_k(\mathfrak{M}(m,\, n\,;\, k) \times U)$$

は稠密な開集合である．特に $\varepsilon > 0$ を任意に与えたとき，$A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}(m,\, n)$ を

$$|a_{ij}| < \varepsilon \qquad (i = 1,\, \cdots,\, m,\; j = 1,\, \cdots,\, n),$$
$$A \notin \bigcup_{k=1}^{n-1} \rho_k(\mathfrak{M}(m,\, n\,;\, k) \times U)$$

を満たすように選べば，τ の定義から τ の Jacobi 行列は

$$\frac{\partial \tau}{\partial u} = \mathfrak{J}(u) + A \notin \bigcup_{k=1}^{n-1} \rho_k(\mathfrak{M}(m,\, n\,;\, k) \times U),$$

すなわち，任意の点 $u \in U$ に対して $\mathrm{rank}(A + \mathfrak{J}(u)) = n$ が証明され，

$$\mathrm{rank}(d\tau(u)) = \mathrm{rank}(A + \mathfrak{J}(u)) = n$$

が任意の点 $u \in U$ で成立し，τ は各点 $u \in U$ で正則だから τ ははめ込み写像である． ∎

定理 16.9 (Whitney のはめ込み定理) X は滑らかな n 次元多様体で，$m \geq 2n$ を仮定する．$C \subset X$ はコンパクト集合，$\sigma : X \to \mathbf{R}^m$ は滑らかな写像で，$\sigma|_C : C \to \mathbf{R}^m$ ははめ込みとする．このとき，任意に与えられた連続正値関数 $\eta : X \to \mathbf{R}_+$ に対して，はめ込み写像 $\tau : X \to \mathbf{R}^m$ で以下の性質を満たすものが存在する：

$$\tau(p) = \sigma(p) \quad (p \in C), \qquad \|\tau(p) - \sigma(p)\| < \eta(p) \quad (p \in X).$$

証明 σ は C の各点で正則だから補題 9.27 によって C を含む開集合 Ω が存在して σ は Ω の各点で正則となる．$\{\Omega,\, X \backslash C\}$ は X の開被覆である．このとき開被覆 $\{\Omega,\, X \backslash C\}$ の細分となる X の局所有限な座標近傍系 $\{(U_j,\, \varphi_j)\}_{j=\pm 1,\, \pm 2, \cdots}$ で以下の条件を満たすものがとれる：

$$U_i \subset C \quad (もしも\ i < 0), \qquad U_i \subset X \setminus C \quad (もしも\ i > 0).$$

$\{U_j\}_{j=\pm 1,\, \pm 2, \cdots}$ を少しだけ縮めて得られた X の局所有限な開被覆 $\{V_j\}$ と $\{W_j\}$ を 1 の分解 (16.1 節) で用いたものとする．このとき，以下の性質を持つ滑らかな写像の列 $\{\sigma_0,\, \sigma_1,\, \cdots\}$ を構成する：

(i)　$\sigma_j : X \to \mathbf{R}^m \qquad (j = 0, 1, \cdots)$.

(ii)　$\sigma_0 = \sigma$.

(iii)　$F_k := \bigcup_{j<0} W_j^b \cup W_1^b \cup \cdots W_k^b$ とおくとき，$\sigma_k|_{F_k}$ ははめ込みである．

(iv)　$\sigma_k(p) = \sigma_{k-1}(p) \qquad (p \notin V_k)$.

(v)　$\|\sigma_k(p) - \sigma_{k-1}(p)\| < \dfrac{\eta(p)}{2^k} \qquad (p \in X,\ k = 1, 2, \cdots)$.

帰納的に $\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_{k-1}$ まで構成できたと仮定する．

$M \in \mathfrak{M}(m, n)$ に対して，$\Phi_M : B(O, 3) \to \mathbf{R}^m$ を

$$\Phi_M(u) := \sigma_{k-1} \circ \varphi_k^{-1}(u) + \psi(u) \cdot Mu \qquad (u \in B(O, 3) \subset \mathbf{R}^n)$$

と定義すると，Φ_M は滑らかな写像である．ここに，$\psi : B(O, 3) \to [0, 1]$ は 16.1 節で定義した関数である．$M = (m_{ij})$, $u^t := (u_1, \cdots, u_n)$ とおいて，Φ_M の Jacobi 行列 $\mathfrak{J}(M, u)$ は $\sigma_{k-1} \circ \varphi_k^{-1}$ の Jacobi 行列 $\mathfrak{J}_k(u)$ を用いて以下のように書ける：

$$\mathfrak{J}(M, u) = \mathfrak{J}_k(u) + \psi(u)M + Mu(\nabla\psi)^t,$$
$$\left(Mu(\nabla\psi)^t\right)_{ij} = \frac{\partial\psi}{\partial u_j} \sum_{\ell=1}^{n} m_{i\ell} u_\ell.$$

ここに，$\nabla\psi := \left(\dfrac{\partial\psi}{\partial u_1}, \cdots, \dfrac{\partial\psi}{\partial u_n}\right)^t$ は ψ の勾配ベクトル場である．このとき，対応 $(M, u) \mapsto \mathfrak{J}(M, u)$ は $\mathbf{R}^{mn} \times B(O, 3) \to \mathbf{R}^{mn}$ の中への滑らかな写像である．

もしも $z \in \varphi_k(V_k^b \cap F_{k-1})$ ならば $\sigma_{k-1} \circ \varphi_k^{-1}$ は z で正則だから，$\mathfrak{J}(0, z) = \mathfrak{J}_k(z)$ は正則行列である．従って補題 9.27 を用いると，$(0, z)$ の $\mathbf{R}^{mn} \times B(O, 3)$ における近傍 $\mathfrak{W}_z \times U_z$ で

$$0 \in \mathfrak{W}_z \subset \mathbf{R}^{mn} \qquad (z \in U_z \subset B(O, 3)),$$

かつ任意の $M \in \mathfrak{W}_z$ と任意の $u \in U_z$ に対して $\mathrm{rank}(\mathfrak{J}(M, u)) = n$ を満たすものが存在する．$\{0\} \times \varphi_k(V_k^b \cap F_{k-1})$ は $\mathbf{R}^{mn} \times B(O, 3)$ 内でコンパクトだから，有限個の点 $z_1, \cdots, z_\ell \in \varphi_k(V_k^b \cap F_{k-1})$ をとって

$$\{0\} \times \varphi_k(V_k^b \cap F_{k-1}) \subset \bigcup_{i=1}^{k} \mathfrak{W}_{z_i} \times U_{z_i}$$

とできる．従って O の近傍 $\mathfrak{W} \subset \mathbf{R}^{mn}$ を十分小さくとり，任意の $M \in \mathfrak{W}$ と任意の $z \in \varphi_k(V_k^b \cap F_{k-1})$ に対して $\mathrm{rank}(\mathfrak{J}(M, z)) = n$ が成立するようにで

きる (この手法は Riemann 多様体の基本弧長や凸半径 (定義 9.28) を求めるときに用いた). 必要ならば更に $\mathfrak{W}$ を小さくとって

$$\eta_k := \min_{\overline{V}_k} \eta, \quad \|Mu\| < \frac{\eta_k}{2^k} \qquad (u \in B(O,\, 2)^b,\, M \in \mathfrak{W})$$

とできる. 補題 16.8 で $U := B(O,\, 2)$, $\sigma := \sigma_{k-1} \circ \varphi_k^{-1}$ かつ $\varepsilon := \min_{M \in \mathfrak{W}} \|M\|$ と選べば, 対応 $u \mapsto \sigma_{k-1} \circ \varphi_k^{-1}(u) + Mu$ は $u \in U$ で正則である. ここで $\sigma_k : X \to \mathbf{R}^m$ を以下で定義する：

$$\sigma_k(p) := \begin{cases} \sigma_{k-1}(p) + \psi(\varphi_k(p))M\varphi_k(p) & p \in U_k, \\ \sigma_{k-1}(p) & p \notin V_k. \end{cases}$$

このとき, $X \setminus U_k$ 上では $\sigma_k = \sigma_{k-1}$ は明らかで, $\mathrm{supp}(\psi) \subset B(O,\, 2)$ だから $U_k \setminus V_k^b$ 上でも $\sigma_k = \sigma_{k-1}$ が成り立つ. $p \in W_k$ のとき, $\psi(\varphi(p)) = 1$ だから補題 16.8 によって σ_k は W_k^b 上で正則となる. $M \in \mathfrak{W}$ だから σ_k は $V_k^b \cap F_{k-1}$ 上でも正則である. 故に σ_k が F_k 上の各点で正則であることが示された.

最後に, 任意の点 $p \in V_k$ に対して

$$\|\sigma_k(p) - \sigma_{k-1}(p)\| = \psi(\varphi_k(p))\|M\varphi_k(p)\| \leq 2^{-k}\eta_k \leq 2^{-k}\eta(p).$$

$p \notin V_k$ のとき, 構成方法から $\sigma_k(p) = \sigma_{k-1}(p)$ だから, 任意の点 $p \in X$ に対して

$$\|\sigma_k(p) - \sigma_{k-1}(p)\| \leq 2^{-k}\eta(p)$$

を得る. こうして写像の列 $\{\sigma_0,\, \sigma_1,\, \cdots\}$ が構成された.

任意の点 $q \in X$ に対して q の近傍 $N_q \subset X$ で開被覆 $\{V_j\}_{j=\pm1,\pm2,\cdots}$ と交わるものの個数が有限個となるものが存在する. 従って, 番号 $k(q)$ が存在して以下が成り立つ：

$$\sigma_{k(q)}(q) = \sigma_\ell(q) \qquad (\forall \ell \geq k(q)).$$

ここで, 写像 $\tau : X \to \mathbf{R}^m$ を

$$\tau(q) := \sigma_{k(q)}(q) \qquad (q \in X)$$

と定義すると, τ は $F_k\,(k = 1,\, 2,\, \cdots)$ 上で正則である. 故に τ は $X = \bigcup F_k$ 上で正則となる.

任意の点 $q \in C$ に対して, $q \in V_j$ ならば, 構成方法から $j < 0$ である. このとき, $\tau(q) = \sigma_0(q) = \sigma(q)$ である. $q \in V_k\,(k > 0)$ のとき,

$$
\begin{aligned}
\|\tau(q)-\sigma(q)\| &\le \|\tau(q)-\sigma_k(q)\| + \sum_{j=1}^{k} \|\sigma_j(q)-\sigma_{j-1}(q)\| \\
&< \eta(q)\sum_{j=1}^{k} 2^{-j} < \eta(q).
\end{aligned}
$$

∎

16.4.1 Whitney の定理の応用

定理 16.9 で示したように，n 次元非コンパクト多様体 M を十分に次元の高い Euclid 空間 $\mathbf{R}^N$ に proper にはめ込むことができる．特に M がコンパクトの場合，有限個の座標近傍で M を覆うことができるので，$\mathbf{R}^N$ へのはめ込みの構成はもっと簡単になる．すなわち，任意の多様体は Euclid 空間にはめ込むことが可能となるから，以下の定理が従う．

定理 16.10　滑らかな多様体 M 上に完備 Riemann 計量が存在する．

証明　$\iota : M \to \mathbf{R}^N$ を proper なはめ込みとする．M の座標近傍を (U, φ) とおけば，

$$
\mathbf{x} := \iota \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \mathbf{R}^N
$$

は n 次元曲面 $\iota(M)$ の正則表示である．

第 1 基本形式 ds^2 は $d\mathbf{x} = \mathbf{x}_i\, du^i$, $(u^1, \cdots, u^n) \in \varphi(U)$ として

$$
ds^2 = \langle d\mathbf{x}, d\mathbf{x}\rangle = g_{ij}\, du^i\, du^j, \qquad g_{ij} = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j\rangle
$$

で与えられ，これは完備 Riemann 多様体 (M, g) を定義する．∎

第17章　Appendix III：コンパクト部分多様体の全絶対曲率

Sard の定理 16.5 を用いて我々は n 次元多様体 M 上の Morse 関数の存在を示し，更に十分に次元の高い Euclid 空間 $\mathbf{R}^m$ に M を proper にはめ込むことができた．従って，一般性を失せず M は $\mathbf{R}^m$ の部分多様体と考えられる．このとき，第 9 章で述べた多様体の接空間や微分写像の (抽象的な) 概念は $\mathbf{R}^3$ 内の曲面と同様に $\mathbf{R}^m$ の中で具体的にとらえることが許され，多様体の理解が更に深まるだろう．proper なはめ込みを介して M に $\mathbf{R}^m$ から Riemann 計量を導入すると，M は定理 16.10 によって完備 Riemann 多様体となる．こうして部分多様体の幾何学が展開されていくが，ここでは Gauss 曲率正の閉曲面についての Hadamard の定理 13.3 の高次元化に関連して，Chern-Lashof [3], [4] の全絶対曲率に関する研究を紹介するに止める．

曲面の Gauss-Bonnet の定理を Riemann 多様体の立場から高次元へ展開することはむずかしい．部分多様体の立場から高次元化を試みることは意味があるだろう．このとき，はめ込み $\tau : M \to \mathbf{R}^m$ が定める Gauss 写像が重要である．M の Euler 標数

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \beta_i(M)$$

の代役となる位相不変量として，M の**総 Betti 数** (total Betti number of M)

$$\beta(M) := \sum_{i=0}^{n} \beta_i(M)$$

を考え，Morse 不等式を用いて S.S.Chern と R.Lashof は全絶対曲率と総 Betti 数との関連を調べた．

17.1　部分多様体の Gauss 写像

M を n 次元コンパクト多様体で，$\tau : M \to \mathbf{R}^m$ をはめ込みとする．Gauss 写像 11.15 の微分を計算しよう．計算に必要な 1 次微分形式を用いた構造方程式を導くために $\mathcal{F}(M)$, $\mathcal{F}(\mathbf{R}^m)$ をそれぞれ M, $\mathbf{R}^m$ の正規直交標構束とする．τ に沿う正規直交標構束 B を以下で定義する：

$$B := \{(\tau(p)\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_m) \,|\, (p\,\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_n) \in \mathcal{F}(M),$$
$$(\tau(p)\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_m) \in \mathcal{F}(\mathbf{R}^m), \quad p \in M\}.$$

B 上で計算が実行される．以降は計算のため，指数に関する以下の約束をする：

$$1 \leq \alpha,\, \beta,\, \gamma \leq m, \quad 1 \leq i,\, j,\, k \leq n, \quad n+1 \leq r,\, s,\, t \leq m.$$

このとき，$\mathbf{R}^m$ の構造方程式は

$$d\tau = \sum_\alpha \widetilde{\theta}_\alpha \mathbf{e}_\alpha, \qquad d\mathbf{e}_\alpha = \sum_\beta \widetilde{\omega}_{\alpha\beta}\mathbf{e}_\beta,$$
$$d\widetilde{\theta}_\alpha = \sum_\beta \widetilde{\omega}_{\alpha\beta} \wedge \widetilde{\theta}_\beta, \qquad d\widetilde{\omega}_{\alpha\beta} = \sum_\gamma \widetilde{\omega}_{\alpha\gamma} \wedge \widetilde{\omega}_{\gamma\beta},$$
$$\widetilde{\omega}_{\alpha\beta} + \widetilde{\omega}_{\beta\alpha} = 0$$

で与えられる．はめ込み $\tau : M \to \mathbf{R}^m$ に沿って $d\tau$ の引き戻し写像を τ^* と書いて，$\tau^*(\widetilde{\omega}_{\alpha\beta}) = \omega_{\alpha\beta}$, $\tau^*(\widetilde{\theta}_\alpha) = \theta_\alpha$ とおけば，$\tau(M)$ の構造方程式は以下で与えられる：

$$\theta_r = 0, \qquad \omega_{ir} = \sum_j b^r_{ij}\theta_j, \qquad b^r_{ij} = b^r_{ji},$$
$$d\tau = \sum_i \mathbf{e}_i\theta_i, \qquad d\mathbf{e}_i = \sum_j \omega_{ij}\mathbf{e}_j + \sum_r \omega_{ir}\mathbf{e}_r,$$
$$d\mathbf{e}_r = \sum_k \omega_{rk}\mathbf{e}_k + \sum_s \omega_{rs}\mathbf{e}_s.$$

今，$\tau(M)$ の単位法球面束 B_ν の点 $(p,\, u) \in B_\nu$ に対して正規直交標構束 B の元 $(\tau(p)\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_m)$ を $\mathbf{e}_m(p) = u$ を満たすように選べば，$(p,\, u)$ における Gauss 写像の微分は B_ν 上の点の微分に等しく，以下で与えられる：

$$d\nu|_{(p,u)} = d\mathbf{e}_m = \sum_i^n \omega_{mi}\mathbf{e}_i + \sum_r^{m-1} \omega_{mr}\mathbf{e}_r.$$

B_ν の p におけるファイバー $B_\nu(p)$ 上の点 $(p,\, u)$ で接空間の正規直交基底が

$(\mathbf{e}_{n+1}\cdots\mathbf{e}_{m-1})$ だから，上式右辺の第 2 項は $B_\nu(p)$ における点 u の微分に他ならない．従って，$d\nu$ の引き戻しを ν^* とし，$\mathbf{S}^\alpha$ の体積素を $d\Sigma^\alpha$ とおくと，$dM=\theta_1\wedge\cdots\wedge\theta_n$ だから

$$\begin{aligned}\nu^* d\Sigma^{m-1}(u) &= (\omega_{m\,1}\wedge\cdots\wedge\omega_{m\,m-1})\wedge(\omega_{m\,n+1}\wedge\cdots\wedge\omega_{m\,m-1})\\ &= \det(b_{ij}^m(p))dM(p)\wedge d\Sigma^{m-n-1}(p,u),\\ &\qquad\qquad (p,u)\in B_\nu,\quad u=\mathbf{e}_m(p).\end{aligned}$$

ここに，$\det(b_{ij}^m(p))$ は $(p,\,u)$ に関する **Lipschitz-Killing 曲率** (Lipschitz-Killing curvature) で，この絶対値を p における単位法球面 $B_\nu(p)$ 上で積分して以下の **Gauss-Kronecker 曲率** (Gauss-Kronecker curvature) $K:M\to\mathbf{R}$ を得る：

$$K(p):=\int_{u\in B_\nu(p)}|\det(b_{ij}^m(p))|d\Sigma^{m-n-1}(p,\,u)\qquad(p\in M).\qquad(17.1.1)$$

このとき，M のはめ込み τ に関する**全絶対曲率** (total absolute curvature) $c(\tau(M))$ は Gauss 写像による M の像集合の測度として以下で定義する：

$$c(\tau(M)):=\int_M K(p)\,dM.\qquad(17.1.2)$$

c_k は k 次元単位球面の体積として，Gauss 写像の写像度 $\dfrac{c(\tau(M))}{c_n}$ ははめ込みの余次元の大きさに無関係であることを以下に示そう．実際，$\mathbf{R}^{m+1}$ の部分空間 $\mathbf{R}^m$ に垂直な単位ベクトルを $\mathbf{a}$ として，2 つのはめ込み $\tau:M\to\mathbf{R}^m$ と $\tau':M\to\mathbf{R}^{m+1}$ を

$$\begin{aligned}&\tau(p):=(x_1(p),\cdots,x_m(p))\in\mathbf{R}^m,\\ &\tau'(p):=(x_1(p),\cdots,x_m(p),\,0)\in\mathbf{R}^{m+1}\qquad(p\in M)\end{aligned}\qquad(17.1.3)$$

とする．もしも

$$\frac{c(\tau(M))}{c_{m-1}}=\frac{c(\tau'(M))}{c_m}$$

が成立したと仮定する．このとき，余次元が大きな 2 つのはめ込み $(m'-m>1)$

$$\begin{aligned}&\tau(p):=(x_1(p),\cdots,x_m(p))\in\mathbf{R}^m,\\ &\tau'(p):=(x_1(p),\cdots,x_m(p),\,0,\cdots,0)\in\mathbf{R}^{m'}\qquad(p\in M)\end{aligned}$$

に対しても $\dfrac{c(\tau(M))}{c_{m-1}}=\dfrac{c(\tau'(M))}{c_{m'-1}}$ が帰納的に成り立つことを以下に示す．

$m'-m=1$ の場合のはめ込み (17.1.3) について全絶対曲率を計算しよう．τ, τ' に沿う正規直交標構束をそれぞれ B, B' とする．このとき $\mathbf{a}$ は $\mathbf{R}^m$ に垂直である．$(p, u') \in B'_\nu$ を任意に固定して $(\tau'(p)\mathbf{e}'_1 \cdots \mathbf{e}'_{m+1}) \in B'$ を $u' = \mathbf{e}'_{m+1}(p)$ に選んで

$$\begin{aligned}
&\mathbf{e}'_{m+1} := \cos\theta\cdot\mathbf{e}_m + \sin\theta\cdot\mathbf{a} \qquad \left(\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2}\right]\right),\\
&\mathbf{e}'_m := \sin\theta\cdot\mathbf{e}_m - \cos\theta\cdot\mathbf{a},\\
&\mathbf{e}'_i := \mathbf{e}_i,\quad \mathbf{e}'_s := \mathbf{e}_s \qquad (n+1\le s\le m-1)
\end{aligned}$$

とする．$\tau'(M)$ の構造方程式は以下で与えられる：

$$\begin{aligned}
&\theta_r = 0,\quad \theta'_i = \theta_i \qquad (n+1\le r\le m+1),\\
&dp = \sum_i^n \mathbf{e}'_i\theta'_i, \qquad d\mathbf{e}'_i = \sum_j^n \omega'_{ij}\mathbf{e}'_j + \sum_{r=n+1}^{m+1}\omega'_{ir}\mathbf{e}'_r,\\
&d\mathbf{e}'_r = \sum_k^n \omega'_{rk}\mathbf{e}'_k + \sum_{s=n+1}^{m+1}\omega'_{rs}\mathbf{e}'_s.
\end{aligned}$$

従って $d\nu' = d\mathbf{e}'_{m+1} = \sum_{k=1}^n \omega'_{m+1\,k}\mathbf{e}'_k + \sum_{s=n+1}^m \omega'_{m+1\,s}\mathbf{e}'_s$ より

$$\begin{aligned}
c(\tau'(M)) &= \int_{B'_\nu} |\omega'_{m+1\,1}\wedge\cdots\wedge\omega'_{m+1\,m}|dB'_\nu,\\
c(\tau(M)) &= \int_{B_\nu} |\omega_{m\,1}\wedge\cdots\wedge\omega_{m\,m-1}|dB_\nu.
\end{aligned}$$

ここに，dB_ν と dB'_ν は B_ν, B'_ν の体積素である．正規直交標構の選び方から

$$\begin{aligned}
d\nu' = d\mathbf{e}'_{m+1} &= \cos\theta\cdot d\mathbf{e}_m + \{-\sin\theta\cdot\mathbf{e}_m + \cos\theta\cdot\mathbf{a}\}d\theta\\
&= \cos\theta\cdot d\mathbf{e}_m - d\theta\cdot\mathbf{e}'_m.
\end{aligned}$$

上式と $\mathbf{e}'_m$, $\mathbf{e}'_s=\mathbf{e}_s$ との内積をとって，2 つの構造方程式から以下の関係式を得る：

$$\begin{aligned}
\omega'_{m+1\,m} &= \langle d\mathbf{e}'_{m+1}, \mathbf{e}'_m\rangle = -d\theta,\\
\omega'_{m+1\,s} &= \langle d\mathbf{e}'_{m+1}, \mathbf{e}'_s\rangle = \cos\theta\cdot\omega_{m\,s}.
\end{aligned}$$

故に

$$\begin{aligned} c(\tau'(M)) &= \int_{B'_\nu} |\omega'_{m+1\,1} \wedge \cdots \wedge \omega'_{m+1\,m}| dB'_\nu \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-1}\theta\, d\theta \int_{B_\nu} |\omega_{m\,1} \wedge \cdots \wedge \omega_{m\,m-1}| dB_\nu \\ &= c(\tau(M)) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-1}\theta\, d\theta \\ &= 2c(\tau(M)) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-1}\theta\, d\theta. \end{aligned}$$

ガンマ関数と単位球面の体積に関する公式：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^k\theta\, d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)},$$

$$c_k = \frac{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}$$

から $\dfrac{c(\tau(M))}{c_{m-1}} = \dfrac{c(\tau'(M))}{c_m}$ が示された．

17.2 Chern-Lashof の定理

以下の Morse の不等式の証明はたとえば Milnor [15] を参照してほしい．

定理 17.1 (Morse の不等式[15]) M を n 次元コンパクト多様体とする．$f : M \to \mathbf{R}$ を M の Morse 関数とするとき，各 $i = 0, 1, \cdots, n$ に対して m_i と $\beta_i(M)$ をそれぞれ f の指数 i の臨界点の個数と i 次元 Betti 数とする．ここで，$\beta_i(M)$ の係数体は任意に固定する．このとき，以下の Morse 不等式と Morse の等式が成立する：

$$m_i \geq \beta_i(M) \qquad (\forall i = 0, \cdots, n),$$
$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i m_i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \beta_i(M) = \chi(M). \tag{17.2.1}$$

Sard の定理を Morse 関数 $h_{\mathbf{e}} := \langle \mathbf{e}, \tau \rangle : M \to \mathbf{R}$ および Gauss 写像 ν :

$B_\nu \to \mathbf{S}_0^{m-1}$ に適用し，Morse の不等式 (17.2.1) を利用して，Chern と Lashof は以下の定理を証明した：

定理 17.2 (Chern-Lashof の定理[3], [4])　n 次元コンパクト多様体 M のはめ込み $\tau : M \to \mathbf{R}^m$ に関する全絶対曲率は

$$\frac{1}{c_{m-1}} c(\tau(M)) \geq \sum_{i=0}^{n} m_i \geq \beta(M) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i(M) \geq 2 \qquad (17.2.2)$$

を満たす．等号成立 $(c(\tau(M)) = 2c_{m-1})$ は $\tau(M)$ が $\mathbf{R}^{n+1}$ 内の凸体の境界 (凸超曲面) のときに限る．従って，このとき M は $\mathbf{S}^n$ に微分同相となる．ここで，$\beta(M)$ は総 Betti 数である．

証明　Gauss 写像 $\nu : B_\nu \to \mathbf{S}_0^{m-1}$ の臨界値集合 $\nu(\mathrm{Crit}(\nu))$ は $\mathbf{S}_0^{m-1}$ の測度ゼロ集合である．$\mathbf{S}_0^{m-1} \setminus \nu(\mathrm{Crit}(\nu))$ の任意の点 $\mathbf{e}$ に対し，$h_{\mathbf{e}}$ は Morse 関数である．Morse の不等式 (17.2.1) より $h_{\mathbf{e}}$ の指数 i の臨界点の個数 m_i は $m_i \geq \beta_i(M)\,(i = 0, \cdots, n)$ を満たす．$\mathbf{e}$ の $\mathbf{S}_0^{m-1} \setminus \nu(\mathrm{Crit}(\nu))$ における近傍が ν によって覆われる回数は $h_{\mathbf{e}}$ の臨界点の個数に等しい．故に (17.2.2) を得る：

$$c(\tau(M)) = c_{m-1} \sum_{i=0}^{n} m_i \geq c_{m-1} \sum_{i=0}^{n} \beta_i(M) = c_{m-1}\beta(M) \geq 2c_{m-1}.$$

$c(\tau(M)) = 2c_{m-1}$ を仮定する．任意の単位ベクトル $\mathbf{e} \in \mathbf{S}_0^{m-1} \setminus \nu(\mathrm{Crit}(\nu))$ に対して Morse 関数 $h_{\mathbf{e}}$ はちょうど 2 個の臨界点 (最大, 最小点) を持つ．$(p, u) \in B_\nu$ に対して，$H(u)$ は p を通り u に垂直な $(m-1)$ 次元超平面とする．$H(u)$ の定める半空間を $H_+(u) := \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m \mid \langle \mathbf{x}, u \rangle \geq 0\}$ と書く．

ある点 $p \in M$ で $\tau(M) \subset H_+(u)$ が任意の $(p, u) \in B_\nu(p)$ に対して成立したと仮定する．このとき $\tau(M)$ はある $(n+1)$ 次元平面に含まれることを証明しよう．実際，$\tau(M)$ を含む最小の平面 $\mathbf{R}^k$ の次元が $k - n > 1$ を満たせば，p における正規直交標構 $(p\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_m)$ は $\mathbf{e}_{m-1}, \mathbf{e}_m \in B_\nu(p)$ を満たし，仮定から任意の $\theta \in [0, 2\pi]$ に対して $\tau(M) \subset H_+(\cos\theta \cdot \mathbf{e}_{m-1} + \sin\theta \cdot \mathbf{e}_m)$ が成立する．従って

$$\tau(M) \subset \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi]} H_+(\cos\theta \cdot \mathbf{e}_{m-1} + \sin\theta \cdot \mathbf{e}_m)$$

を得る．ここで上式右辺は $(m-2)$ 次元平面だから，$\tau(M)$ は $(m-2)$ 次元平面に含まれる．こうして $\tau(M)$ を含む平面の次元が $k = n+1$ まで下がる．

次に，上述の議論の仮定が満たされない場合を考えよう．すなわち，任意の点

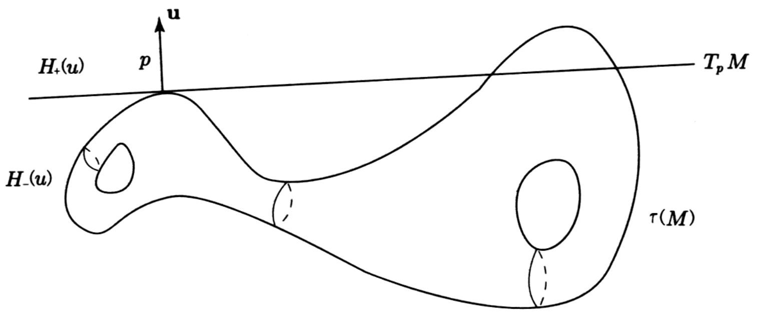


Figure 17.2.1

$p \in M$ に対してある単位法線ベクトル $u \in B_\nu(p)$ が存在して，$H(u)$ は $\tau(M)$ を分離すると仮定する [Figure 17.2.1]．ここに，$\nu(p, u) = u \notin \nu(\mathrm{Crit}(\nu))$ と仮定してよい．$H(u)$ が $\tau(M)$ を分離するから，Morse 関数 h_u は最小値が $h_u(p)$ よりも小で，最大値が $h_u(p)$ よりも大である．ν の連続性によって，この大小関係は $u \in \mathbf{S}_0^{m-1}$ の十分小さい開集合 $W \subset \mathbf{S}_0^{m-1}$ 内で保たれる．すなわち，任意の $w \in W$ に対して h_w は少なくとも 3 個の臨界点を持つから，$c(\tau(M)) > 2c_{m-1}$ となって矛盾である．故に，上述の議論にもどって，$\tau(M)$ を含む $(n+1)$ 次元平面 $\mathbf{R}^{n+1}$ が存在する．

最後に $\tau : M \to \mathbf{R}^{n+1}$ が埋め込みで，$\tau(M)$ は $\mathbf{R}^{n+1}$ 内の凸体の境界であることを証明しよう．もしも M の異なる 2 点 p, q で $\tau(p) = \tau(q)$ が成り立つと仮定すると，$(p, u), (q, v) \in B_\nu$ として，$\nu(p, u) \in \mathbf{S}_0^n$ の近傍 $W \subset \mathbf{S}_0^n \backslash \nu(\mathrm{Crit}(\nu))$ で，任意の $w \in W$ に対して h_w は少なくとも 3 個の臨界点を持つものが存在し，矛盾をきたす．特に，各点 $p \in M$ の接空間 $H(p)$ は $(p, u) \notin \mathrm{Crit}(\nu)$ を満たせば $\tau(M)$ を分離しない．ν の連続性によって，任意の点 $p \in M$ に対しても $\tau(M) \subset H_+(p)$ が成立する．従って $\tau(M)$ は凸体 $\displaystyle\bigcap_{p \in M} H_+(p)$ の境界である．∎

注意 17.3　Morse 関数 $h_\mathbf{e}$ の指数 i の臨界点は $h_{-\mathbf{e}}$ の指数 $n-i$ の臨界点である．従って $h_\mathbf{e}$ の指数 i の臨界点の個数を m_i とすると，$h_{-\mathbf{e}}$ の指数 $n-i$ の臨界点の個数は m_i である．故に M の次元が奇数のとき，$n = 2k+1$ とおいて，$c_0 = c_{2k+1}, \cdots, c_k = c_{k+1}$ となるから，定理 17.1 により $\chi(M) = 0$ が成立する．

ここで考えられる自然な問題は，M と $\mathbf{R}^m$ を与えたときはめ込み $\tau : M \to$

$\mathbf{R}^m$ を変化させて $\inf_{\tau : M \to \mathbf{R}^m} c(\tau(M))$ を実現する τ を決定することができるか？である．

例 17.4　$\mathbf{R}^3$ 内の回転トーラス $T^2(a, b)$ の例 9.36 における $\tau : T^2 \to \mathbf{R}^3$, $\tau(T^2) = T^2(a, b)$ の全絶対曲率を調べよう．Gauss 写像 $\nu : T^2 \to \mathbf{S}^2$ の退化臨界値は $(0, 0, \pm 1)^t \in \mathbf{S}^2$ である．たとえば，ベクトル $\mathbf{e} := (1, 0, 0)^t$ に関する Morse 関数 $h_{\mathbf{e}} : M \to \mathbf{R}$ は最大値と最小値を実現する点を 1 個ずつ，極大でも極小でもない臨界値を実現する点を 2 つとる．すなわち，$m_0 = m_2 = 1$, $m_1 = 2$ が成り立ち，このことは他の全ての Morse 関数 $h_v : M \to \mathbf{R}$, $v \neq (0, 0, 1)^t$ に対しても成り立つ．

他方，$\beta_0(T^2) = \beta_2(T^2) = 1$, $\beta_1(T^2) = 2$ だから $\beta(T^2) = 4$ である．$T^2(a, b)$ の全絶対曲率は $c(\tau(T^2)) = \dfrac{1}{2} c_2 \beta(T^2) = 8\pi$ となる．計算を実行すると，Gauss 曲率 G は $-\dfrac{\pi}{2} < v < \dfrac{\pi}{2}$ のとき $G > 0$ かつ $v \in \left(-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ のとき $G < 0$ を満たし，2 つの平行円 $v = \pm\dfrac{\pi}{2}$ によって Gauss 曲率が正の領域と負の領域に分けられる．Gauss-Bonnet の定理 6.25 より

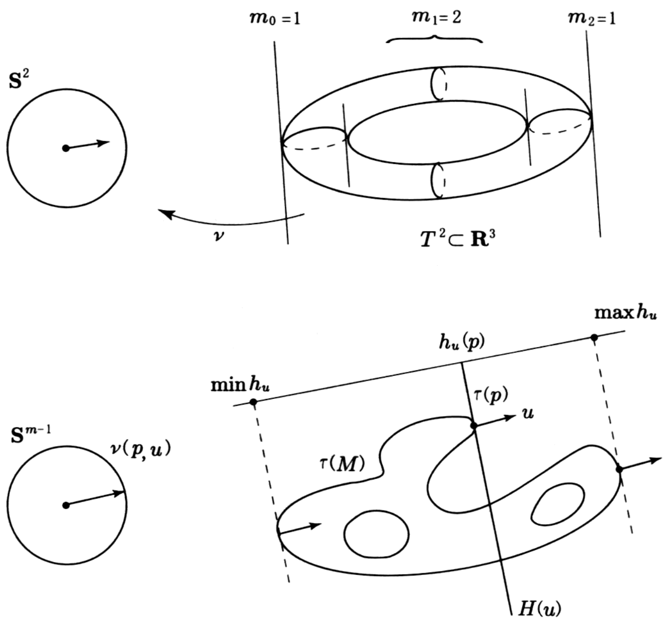


Figure 17.2.2

$$\int_{T^2(a,b)} K\,dM = \frac{1}{2}\chi(T^2)c_2 = 0.$$

Gauss 写像による Gauss 曲率が正の領域の像は $\mathbf{S}^2$ から両極を除いた領域で，Gauss 写像による Gauss 曲率が負の領域の像に等しい．従って

$$\int_{T^2(a,b)} K_+(p)dM(p) = -\int_{T^2(a,b)} K(p)_- dM(p) = 4\pi.$$

T^2 を $\mathbf{R}^3$ にはめ込んだときの全絶対曲率をはめ込みに関する関数と考えたとき，この下限には総 Betti 数が関係し，回転トーラスは下限を与える埋め込みであることが解る [Figure 17.2.2].

上の例 17.4 での考察から，$\mathbf{R}^3$ 内の閉曲面 M に対しては以下の結果[4]が解る．

定理 17.5 M は向き付けられた種数 g のコンパクト 2 次元多様体 (g 人乗り浮き袋) で，$\tau : M \to \mathbf{R}^3$ をはめ込みとする．このとき

$$\inf_{\tau:M\to\mathbf{R}^3} c(\tau(M)) \geq \frac{1}{2}\beta(M)c_2 = 4\pi(1+g). \qquad (17.2.3)$$

ここに，等号を成立させるための必要十分条件は，Gauss 曲率が正となる任意の点 $p \in M$ で接平面 $T_{\tau(p)}M$ の片側に $\tau(M)$ が埋め込まれることである．

証明 $c(\tau(M)) = 4\pi(1+g)$ を仮定すると，任意のベクトル $\mathbf{e} \notin \nu(\mathrm{Crit}(\nu))$ に対して $m_0 = m_2 = 1$ かつ $m_1 = 2g$ が成り立つ．従って $h_{\mathbf{e}}$ はただ 1 点で最大値と最小値とを実現する．$h_{\mathbf{e}}$ の最大点と最小点を通る $\mathbf{e}$ に垂直な 2 平面の間に $\tau(M)$ は含まれ，それらの点で $h_{\mathbf{e}}$ は非退化臨界点だから Gauss 曲率 K は正である．すなわち，$\tau(M)$ はそれらの点における接平面の片側にある．$K(p) > 0$ を満たす点での接平面が $\tau(M)$ を分離したと仮定する．p における単位法線ベクトル $\mathbf{e}$ の定める Morse 関数 $h_{\mathbf{e}}$ は p で最大でも最小でもない極大 (または極小) 値をとる．従って $m_0 \geq 2$ または $m_2 \geq 2$ となって $c(\tau(M)) > 4\pi(1+g)$ を得る．これは仮定に反する．これで等号成立の必要条件が証明された．同様の考察によって τ が埋め込みとなることが解る．

$c(\tau(M)) > 4\pi(1+g)$ を仮定する．あるベクトル $\mathbf{e} \notin \nu(\mathrm{Crit}(\nu))$ の定める Morse 関数 $h_{\mathbf{e}}$ に対して $m_0 + m_1 + m_2 > 2(1+g)$ かつ $m_0 - m_1 + m_2 = \beta_0(M) - \beta_1(M) + \beta_2(M) = 2(1-g)$ が成り立つ．すなわち，$h_{\mathbf{e}}$ の極大点を与える異なる点が少なくとも 2 点 $p_1, p_2 \in M$ 存在する．Gauss 曲率はそれらの

点で正だから，近傍 $p_1 \in U_1$, $p_2 \in U_2$ が存在して

$$\nu(U_1) = \nu(U_2) \subset \mathbf{S}_0^2 \setminus \nu(\mathrm{Crit}(\nu))$$

となる．このとき，$p_1' \in U_1$ を p_1 の十分近くにとって $K(p_1') > 0$ かつ $T_{\tau(p_1')}M$ が U_2 を分離するようにできる．すなわち，$T_{\tau(p_1')}M$ は $\tau(M)$ を分離する．よって等号成立のための十分性が証明された．∎

$M \subset \mathbf{R}^{n+1}$ がコンパクト超曲面のとき，Lipschitz-Killing 曲率 $G(p, \mathbf{e})$ の絶対値は Gauss-Kronecker 曲率 $K(p)$ に等しく，$G(p, \mathbf{e})$ は単位法線ベクトル場 $\mathbf{e}$ に関する主曲率の積で与えられる．$\mathbf{e} \notin \nu(\mathrm{Crit}(\nu))$ とする．Morse 関数 $h_{\mathbf{e}}$ の指数 i の臨界点 p において，$K(p)$ の符号は $(-1)^i$ となる．この点で超曲面の主曲率は正となるものが $n-i$ 個，負となるものが i 個である．すなわち，n が奇数のときは $G(p, \mathbf{e}) + G(p, -\mathbf{e}) = 0$ が任意の点 $p \in M$ で成り立ち，

$$\int_{B_\nu} K\, dB_\nu = 0$$

となる．$K(p) := |G(p, \mathbf{e})|$ の積分に関しては，Hadamard の定理 13.3 を思い起こせば以下の定理が成り立つ：

定理 17.6　M は n 次元コンパクト多様体とする．はめ込み $\tau : M \to \mathbf{R}^{n+1}$ の全絶対曲率は

$$\inf_{\tau: M \to \mathbf{R}^{n+1}} c(\tau(M)) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i(M) c_n = \beta(M) c_n$$

を満たす．はめ込みが等号を成立させるための必要十分条件は，$K(p) > 0$ を満たす任意の点 $p \in M$ において $\tau(M)$ が接空間 $T_{\tau(p)}M \subset \mathbf{R}^{n+1}$ の片側に含まれることである．

問 17.7　上の定理を証明せよ．

Gauss-Bonnet の定理はコンパクト偶数次元超曲面上で以下のように成り立つ：

定理 17.8 (超曲面に対する Gauss-Bonnet の定理)　向き付け可能な $2n$ 次元コンパクト多様体 M が $\mathbf{R}^{2n+1}$ にはめ込まれているとき，G をはめ込みに関する Lipschitz-Killing 曲率とすると，

$$\int_M G\, dM = \frac{1}{2}\chi(M) c_{2n}$$

が成立する．

証明　τ に沿う単位法線ベクトル場を $\mathbf{e}$ として，

$$B := \{(p\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_{2n+1}) \,|\, (p\mathbf{e}_1 \cdots \mathbf{e}_{2n}) \in \mathcal{F}(M)\},$$
$$B_\nu := \{(p, u) \,|\, u = \pm\mathbf{e}(p)\}$$

とおく．Gauss 写像 $\nu : B_\nu \to \mathbf{S}_0^{2n}$ は M の各点 p を $(p,\, u)$, $(p,\, -u)$ と 2 回数えることに注意する．ν の臨界点集合 $\mathrm{Crit}(\nu)$ の各点で Lipschitz-Killing 曲率が 0 となる．各々の $i = 0, \cdots, 2n$ に対して

$$B_\nu^i := \{(p,\, u) \in B_\nu \,|\, p \text{ は } h_u \text{ の指数 } i \text{ の臨界点}\}$$

とおくと，$B_\nu \setminus \mathrm{Crit}(\nu) = B_\nu^0 \cup \cdots \cup B_\nu^{2n}$ である．ここで，$(q,\, u) \in B_\nu^i$ は h_{-u} の指数 $2n - i$ の臨界点だから，$\nu(B_\nu^i \cup B_\nu^{2n-i})$ は $\mathbf{S}_0^{2n} \setminus \nu(\mathrm{Crit}(\nu))$ をちょうど m_i 回覆う．更に，$(q,\, u) \in B_\nu^i$ で $\mathbf{e}_{2n+1} = u$ に関する主曲率は i 個が負で，残りの $2n - i$ 個は正である．従って $G(q,\, u)$ の符号は $(-1)^i$ となる．故に

$$2\int_M G\,dM = \int_{B_\nu} G\,dB_\nu = \int_{B_\nu \setminus \mathrm{Crit}(\nu)} G\,dB_\nu$$
$$= \sum_{i=0}^{2n} \int_{B_\nu^i} G\,dB_\nu = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i m_i c_{2n} = \chi(M) c_{2n}.$$

∎

問 17.9　$\tau : M \to \mathbf{R}^m$ を proper なはめ込みとする．このとき τ から導入された M の Riemann 計量は完備であることを証明せよ．

問 17.10　定理 17.2 で $c(\tau(M)) = 2c_{m-1}$ のとき，M は $\mathbf{S}^n$ と微分同相であることを証明せよ．

問 17.11 (Chern-Lashof の定理[3])　M は n 次元コンパクト多様体で，$\tau : M \to \mathbf{R}^m$ は滑らかなはめ込みとする．もしも $c(\tau(M)) < 3c_{m-1}$ ならば，M は $\mathbf{S}^n$ と同相であることを証明せよ．

参考文献

[1] L.Auslander and R.MacKenzie, Introduction to differentiable manifolds, McGraw–Hill Co. New York–Toronto–London, 1963.

[2] H.Busemann, The Geometry of Geodesics, Academic Press, New York–London, 1955.

[3] S.S.Chern and R.Lashof, *On the total curvature of immersed manifolds*, Amer. J. Math. **79**, (1957), 289–297.

[4] S.S.Chern and R.Lashof, *On the total curvature of immersed manifolds II*, Michigan Math. J. **5**, (1959), 5–12.

[5] S. Cohn-Vossen, *Kürzeste Wege und Totalkrümmung auf Flächen*, Compositio Math. **2**, (1935), 63–133.

[6] S.Cohn-Vossen, *Totalkrümmung und Geodätische Linien auf einfach zusammenhängenden offenen volständigen Flächenstücken*, Recueil Math. Moskow (Mat. Sbornik), (1936), 139–163.

[7] D.Gilbarg and N.S.Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, A series of comprehensive studies in mathematics, **224**(1979), Springer-Verlag, Berlin, New York.

[8] D.Gromoll–W.Klingenberg–W.Meyer, *Riemannsche Geometrie im Grossen*, Springer Lecture Notes in Mathematics, **68**, 1968.

[9] D.Hilbert, *Über Flächen von konstanter Gaußscher Krümmung*, Trans. Amer. Math. Soc. **2**, (1901), 87–99.

[10] H.Hopf, Differential Geometry in the Large, Mimeographed Lecture Note, Princeton University, 1960.

[11] A.Huber, *On subharmonic functions and differential geometry in the large*, comment. Math. Helv. **32**, (1957), 13–72.

[12] 小林昭七,『曲線と曲面の微分幾何』裳華房, 1996.

[13] W.S.Massey, *Surfaces of Gaussian curvature zero in Euclidean 3-space*, Tōhoku Math. J. **14**(1962), 73–79.

[14] 松島与三,『多様体入門』裳華房, 1968.

[15] J.Milnor, Morse Theory, Ann. of Math. Studies, Princeton, **51**, (1963).

[16] 大槻富之助,『微分幾何学』朝倉書店, 1962.

[17] K.Shiohama and T.Shioya and M.Tanaka, *The geometry of total curvature*

on complete open surfaces, Cambridge Tracts in Mathematics, **159**(2003), Cambridge University Press.

[18] K.Shiohama and R.Takagi, *On a characterization of a standard torus in* $\mathbf{E}^3$, J.Differential Geometry, **4**(1970), 477–485.

索引

塩濱勝博（しおはま・かつひろ）

略歴

1940 年　東京都港区に生まれる.
1964 年　東京工業大学理工学部数学科を卒業.
1966 年　東京工業大学大学院理工学研究科を修了.
　　その後，東京工業大学，筑波大学，九州大学を経て，
現在　佐賀大学理工学部数理科学科教授，九州大学名誉教授.
　　理学博士．専攻は幾何学.

成　慶明（Cheng Qing-Ming）

略歴

1959 年　中国内蒙古自治区赤峰市に生まれる.
1983 年　（中国）東北大学理学部数学科を卒業.
1985 年　（中国）東北大学大学院理学研究科を修了.
　　その後，（中国）東北大学，復旦大学，佐賀大学，城西大学を経て，
現在　佐賀大学理工学部数理科学科教授.
　　理学博士．専攻は微分幾何学.

曲面の微分幾何学——局所理論から大域理論へ

2006 年 4 月 10 日　第 1 刷発行

著　者……………………塩濱勝博・成 慶明 ©
発行者……………………林　克行
発行所……………………株式会社　日本評論社
〒170-8474 東京都豊島区南大塚 3-12-4
電話：03-3987-8621［販売部］　http://www.nippyo.co.jp
企画・制作………………亀書房［代表：亀井哲治郎］
〒170-0005 東京都豊島区南大塚 3-12-3 ロダンサイド・ビル 4 階
電話 & FAX：03-3987-0248
E-mail：kame-shobo@nifty.com
印刷所……………………三美印刷株式会社
製本所……………………松 岳 社
装　幀……………………海保　透
ISBN 4-535-78518-X　Printed in Japan